

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20 051.089
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Шарину Сергію
Володимировичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора, професора кафедри фізико-математичних наук Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу **Бандури Андрія Івановича** на дисертаційну роботу **Василишин Світлани Ігорівни** «Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, породжені зліченною множиною твірних елементів», подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дослідження. Одним із основних напрямків розвитку сучасного нелінійного функціонального аналізу є теорія аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах. Теорія диференціювання функцій від нескінченного числа змінних розпочала свій розвиток наприкінці ХІХ – на початку ХХ століття завдяки роботам В. Вольтерра, М. Фреше, Г. фон Коха, Д. Гільберта, Р. Гаго. Сучасне означення аналітичної функції на банаховому просторі було введено незалежно А. Е. Тейлором і А. М. Грейвсом. Також у 1930-х роках розвитком теорії аналітичних функцій на банахових просторах займалися А. Д. Міхал, А. Х. Кліфорд, І. Е. Хайберг, С. Банах, В. Орліч, С. Мазур. Подальший розвиток теорії пов'язаний із дослідженнями М. А. Цорна, А. Картана, М. Ерве, П. Лелона, Л. Нахбіна, А. Мартіна, К. Стейна. Відомо, що сукупності аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах у багатьох випадках утворюють алгебри, які можна певним природним чином топологізувати. Важливим прикладом такої алгебри слугує алгебра Фреше $H_b(X)$ всіх цілих аналітичних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X . Природною топологією на алгебрі $H_b(X)$ виступає топологія рівномірної збіжності на обмежених підмножинах простору X . Алгебра $H_b(X)$ досліджувалася багатьма авторами, зокрема Р. Ароном, Б. Коулом, Т. Гамеліном, П. Галіндо, Д. Гарсія, М. Маестре, Т. Корном, Ж. Мухікою, а також А. В. Загороднюком та його учнями. Одним із основних результатів докторської дисертації А. В. Загороднюка був опис спектра алгебри $H_b(X)$ як множини послідовностей лінійних неперервних функціоналів на тензорних степенях простору X . Цей результат показав, що в загальному випадку спектр алгебри $H_b(X)$ має доволі складну структуру, однак допускає описання через деякий простір послідовностей. Саме це спонукало дисертантку до розгляду менших підалгебр аналітичних функцій алгебри $H_b(X)$, аби мати нагоду отримати вичерпний опис їхніх гомоморфізмів.

Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація (її повний обсяг становить 149 сторінок друкованого тексту) складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 113 найменувань, і додатка.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, встановлено зв'язок дослідження з науково-дослідними роботами та проектами, сформульовано мету, задачі, об'єкт, предмет та методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, також зазначено перелік публікацій та апробацій здобутків дисертаційного дослідження.

Перший розділ містить огляд літератури за темою дисертаційного дослідження та викладення необхідного теоретичного матеріалу.

Другий розділ розпочинається з дослідження властивостей топологічних алгебр аналітичних функцій, породжених зліченими множинами багаточленів на комплексних банахових просторах. Узагальнено теорему про обчислення радіус-функції лінійного функціонала для підалгебри алгебри Фреше всіх цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на комплексному банаховому просторі X , яка має наступну властивість: для кожної функції, яка належить цій підалгебрі, усі члени її ряду Тейлора теж належать підалгебрі. Розглянуто підалгебру $H_{bP}(X)$ алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$, породжену зліченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів P . Доведено, що дана алгебра є алгеброю Фреше і що кожен член розвинення у ряд Тейлора функції, що належить алгебрі $H_{bP}(X)$, зображається алгебричною комбінацією елементів множини P . До того ж розглянуто загальний клас алгебр, породжених послідовностями однорідних багаточленів. Досліджено умови, за яких дві такі алгебри ізоморфні та побудовано декілька прикладів різних зліченно-породжених алгебр.

Третій розділ, на думку опонента, найцікавіший і найвагоміший. У ньому вивчаються спектри алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченими множинами багаточленів на деяких просторах послідовностей. Зокрема, у розділі досліджено спектр алгебри Фреше всіх комплекснозначних цілих функцій обмеженого типу, породженої послідовністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі $7\ell_1$. Розглянуто пов'язану з описом спектра задачу продовження функцій із цієї алгебри на послідовності, які не належать простору ℓ_1 . Побудовано приклад функції, яка належить даній алгебрі і є добре визначеною на елементі $x_0 = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$, але не може бути продовженою до аналітичної функції обмеженого типу на просторах ℓ_p , де $1 < p < \infty$. Також у розділі розглянуто деякі операції зсуву, які здійснюються на спектрі алгебри Фреше цілих функцій обмеженого типу, породженої послідовністю поліномів деякого спеціального вигляду на комплексному банаховому просторі ℓ_p , де $1 \leq p \leq \infty$.

Четвертий розділ присвячено дослідженню умов ізоморфізму топологічних алгебр цілих функцій обмеженого типу, породжених зліченими множинами поліномів на комплексних банахових просторах. У даному розділі встановлено умови існування ізоморфізму алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів степеня n з одиничними нормами на комплексних банахових просторах.

П'ятий розділ присвячено дослідженню алгебричних базисів алгебри поліномів, породженої зліченною множиною твірних елементів. Встановлено оцінку для коефіцієнтів функцій, що належать алгебрі $H_{bP}(\ell_p)$, де $1 \leq p < \infty$, для деякого виду багаточленів P . Також побудовано приклад зліченно-породженої алгебри, у якій всі алгебричні базиси однорідних багаточленів еквівалентні.

В роботі здійснено аналіз сучасних досліджень з цього розділу функціонального аналізу, що засвідчується чималим списком використаних джерел.

У додатку наведено список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Усі названі вище результати дисертаційної роботи є новими.

Відсутність порушення академічної доброчесності. За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У дисертаційній роботі відсутні порушення академічної доброчесності.

Обґрунтованість і правильність отриманих результатів. Усі отримані у дисертаційній роботі результати нові, правильні та строго обґрунтовані, що забезпечено наявністю чітких, повних і правильних доведень для усіх наведених у цій роботі тверджень.

Апробація результатів і публікації. Результати дисертації опубліковані у про-

відних наукових журналах України та інших країн. Усі 5 статей зі списку публікацій повністю відповідають вимогам щодо публікацій результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук: вони опубліковані у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на чималому числі вітчизняних та закордонних конференцій.

Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Одержані результати можуть мати перспективи подальшого застосування у теорії аналітичних функцій на банахових просторах, теорії алгебр Фреше та теорії багаточленів на банахових просторах. До того ж рано чи пізно настане мить, коли їх спробують перенести на випадок аналітичних векторнозначних функцій на банахових просторах.

Зауваження.

1. У тексті дисертації часто надibuємо на такий буквальний переклад словосполучення *well-defined* як добре визначена. Однак це трохи рiже слух менi. Якщо заглянути у словник О. Кочерга, Є. Мейнарович, Англійсько-українсько-англійський словник наукової мови (фізика та споріднені науки). Частина I англійсько-українська. Вінниця, Нова книга, 2010. – XXXIV+ 1384с., то там пропонують такі варіанти перекладу: однозначно означений, чітко визначений.
2. С.4₁₂ пропущено кому у фразі „встановлення умов за яких“.
3. Підрозділ 2.2. В анотації на с.5, зокрема, згадується про те, що існує біекція між спектром алгебри $H_{b\mathbb{P}}(X)$ і деякою множиною послідовностей комплексних чисел. В опонента виникло таке питання: чи ця множина послідовностей може бути щільною у точках (себто комплексних числах), які не будуть границями жодної окремої послідовності. І чи може ця множина послідовностей разом зі своїми граничними точками охоплювати усю комплексну площину?
4. С. 12₈ Замість "norm one" краще виглядає "unit norm".
5. С. 8₁₄ Фраза "In particular, in this field work such scientists as" явно нагадує прямий переклад з української, бо зовсім не відповідає правилам англійської мови.
6. С. 20. У переліку умовних позначень при розшифруванні \mathbb{P} використовується така норма $\|P_n\|_1$ без пояснення, як вона задається. Згодом у дисертації можна знайти визначення $\|P_n\|_r$ як $\sup_{\|x\| \leq r} |P_n(x)|$, однак його пасувало б також притулити у цей перелік.
7. У вступі на с. 22 та у першому розділі на с.33 надibuємо таку фразу „У 1923 році Н. Вінер узагальнив велику кількість класичних результатів на випадок аналітичних функцій від однієї комплексної змінної зі значеннями у нескінченновимірних просторах.“ Таке твердження, поза всяким сумнівом, вимагає конкретного цитування. До того ж у зв'язку з таким реченням пасувало б згадати праці відомого харківського математика С.Ю. Фаворова, в якого вагома частина його докторської дисертації була присвячена голоморфним функціям зі значеннями у банахових просторах. Назва дисертації українською така „Виняткові множини та асимптотичні властивості голоморфних відображень в скінченновимірні і банахові простори“.
8. с.22₄ Замість А. Дуаді. має бути А. Дуаді (без крапки, бо там далі йде кома).
9. с.22₃ Замість П. Лелонга має бути П. Лелона.
10. В анотації та у вступі на с. 23₆ як одна зі задач дослідження згадується задача отримання повного та точного опису гомоморфізмів деяких підалгебр аналітичних функцій. Так-от, це породжує таке питання: який сенс вкладається у фразу „точний опис гомоморфізмів“? Адже у математиці фраза „точна нерівність“, „точна оцінка“ має цілком конкретне значення.
11. с. 25₁₁ Фраза „передбачає вирішення таких задач“ містить математичну кальку з російської. В українській математиці не вирішують, а розв'язують задачі.

12. Апробація через конференції вражає і заслуговує якнайщиріших оплесків, хоча хотілося б можливо ще 1 виступ на якомусь семінарі, втім звісно варто пам'ятати, що ця праця готувалася в умовах ковіду та війни.
13. У тексті дисертації в кількох місцях (наприклад, с.34¹⁶) можна знайти таке словосполучення „є цілою аналітичною функцією“ на якомусь нескінченновимірному просторі. Так-от, опонента бентежить одночасне вживання ціла й аналітична. Це неточність чи просто в нескінченновимірному комплексному аналізі існують цілі функції, які не аналітичні. Далєбі, цю особливість варто пояснити в першому розділі.
14. с.36₁₅, бачимо некоректне загублене посилання [18], [?].
15. с.36₃, 109¹ Хоча в галицькому діалекті часто кажуть „природніми“, втім правильно буде „природними“.
16. с.42. У означенні 1.11 згадується про „сукупну неперервність“ множення у топологічному лінійному просторі, однак не розшифровано зміст цього словосполучення.
17. с.48. До теореми 1.4 (критерію гіперциклічності) пасувало б додати посилання на працю, звідки вона взята.
18. с. 49. Замість Теорема 3.2 має бути теорема 3.2.
19. с.50₁₅ (і не тільки) Замість „наступну властивість“ має бути „таку властивість“, бо в українській мові „наступний“ вживається лишень у випадку наявності якогось переліку.
20. с.62₇ „на послідовністю“ має бути „над послідовністю“.
21. с.71. У розділі 3.1 вивчається спектр алгебри $H_{\text{bil}}(X)$, де $c_{00} \subset X \subset \ell_{\infty}$. Чи можлива в результатах цього розділу одна з рівностей $X = c_{00}$ або $X = \ell_{\infty}$?
22. с.72¹²⁻¹³ (див. також с.74) опонентові здається, що другий знак рівності у тому ланцюжку варто замінити на \leq , бо спершу беруть супремум по всіх $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in \ell_{\infty}$ таких, що $x_m = 0$ для всіх $m > \kappa_{\text{max}}$. А, на нашу думку, множина цих x строго міститься у множині усіх $x \in c_{00}$, адже тут нема ніякої умови на кшталт $m > \kappa_{\text{max}}$.
23. с. 77, 79. У тексті дисертації часто розглядаються характери зі значеннями в \mathbb{C} , та будуються елементи як послідовність значень кореня n -го степеня характера на деяких багаточленах. У такому разі необхідно однозначно доозначувати корінь n -го степеня, як корінь з комплексного числа. Це не скрізь зроблено.
24. с.81⁶. У доведенні теореми 3.4 згадується принцип максимуму модуля з класичної книжки Тігмарша про теорію функцій. Однак вона присвячена одновимірному комплексному аналізу. Натомість у рядках 7-9 на цій сторінці береться супремум на n -вимірній кулі від модуля функції від n змінних, тому тут використовується багатовимірний принцип максимуму модуля. Відповідно, працю Тігмарша варто замінити на якийсь сучасний підручник з багатовимірного комплексного аналізу. Наприкла, Стівена Кранца (Steven Krantz).
25. с.88₅ замість Наслідок 1 має бути наслідок 1.
26. с.100. У формулюванні твердження 4.2 та його доведенні згадується про аналітичність відображення $\Phi : Z \rightarrow Z$, де Z — локально опуклий топологічний векторний простір, однак означення як таке не наведено.
27. с.120₂ замість Теореми 5.2 має бути теорема 5.2

Висновок. Звісно наведені вище зауваження не чинять істотного впливу на розуміння роботи, а також не зменшують значення отриманих вагомих результатів. А, отже, дисертаційна робота «Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, породжені зліченною множиною твірних елементів» безперечно цілісна наукова праця, що містить нові важливі та цікаві результати з царини функціонального аналізу. Ця праця повністю відповідає усім вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня докто-

ра філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами від 21.03.2022 р. №341), а її авторка, Василичин Світлана Ігорівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 „Математика та статистика“ за спеціальністю 111 „Математика“.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри фізико-математичних наук
Івано-Франківського національного технічного
університету нафти і газу


Андрій БАНДУРА



Підпис(и)	Андрія БАНДУРА
позвіднюю	
Учений секретар ІФНТУНГ	Л. В. Процюк
10	01 2024 р.