

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20 051.089
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Шарину Сергію Володимировичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

ВІДГУК

офіційного опонента, кандидата фізико-математичних наук, старшого дослідника, керівника відділу аналізу, геометрії та топології Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України **Чернеги Ірини Володимирівни** на дисертаційну роботу **Василишин Світлани Ігорівни** «Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, породжені зліченною множиною твірних елементів», подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дослідження. Дисертаційну роботу присвячено вивченню властивостей топологічних алгебр цілих функцій, породжених зліченими множинами однорідних поліномів на комплексних банахових просторах, та дослідженню спектрів таких алгебр.

Алгебри аналітичних функцій на банаховому просторі, породжені зліченною множиною поліномів, природно з'являються як алгебри інваріантів відносно дій груп симетрії на банаховому просторі. Типовими прикладами таких алгебр є алгебри симетричних аналітичних функцій на просторах ℓ_p , де $1 \leq p < \infty$, відносно групи перестановок базисних векторів або алгебри симетричних аналітичних функцій обмеженого типу на просторах $L_p(\Omega)$, де $1 \leq p \leq \infty$, відносно групи автоморфізмів вимірного простору Ω . Дані алгебри та їхні спектри досліджувалися у роботах Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, Д. Гарсія, М. Маестре, І. Залдуендо, Х. Фалко, А. Загороднюка, Т. Василичина, А. Бандури, В. Кравців.

У загальному випадку проблема опису спектрів алгебр зі зліченими алгебраїчними базисами не є розв'язаною. Проблема опису спектрів таких алгебр не є тривіальною навіть у скінченновимірному випадку. Наприклад, відома чотирнадцята проблема Гільберта з теорії інваріантів має негативний розв'язок згідно з контрприкладом Нагати.

У дисертаційній роботі продовжено дослідження спектрів довільних зліченно-породжених алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах, алгебраїчних базисів в цих алгебрах, умов еквівалентності базисів, умов ізоморфності різних зліченно-породжених алгебр аналітичних функцій. Такі дослідження призводять до узагальнень результатів Р. Арона, П. Галіндо, М. Маестре, Р. Аленкара, Р. Гонзало на ширший клас абстрактних зліченно-породжених алгебр. Таким чином, актуальність тематики дисертаційного дослідження Васишин Світлани Ігорівни не викликає жодних сумнівів.

Аналіз змісту роботи. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка. Загальний обсяг роботи складає 149 сторінок, список використаних джерел містить 113 найменувань.

Структура дисертації є логічною, відповідає меті та завданням дослідження, що забезпечує цілісність, системність та послідовність викладу матеріалу.

У **вступі** чітко обґрунтовано актуальність обраної теми дисертаційної роботи, зазначено зв'язок дисертаційного дослідження з науково-дослідними роботами та проектами, мету, задачу, об'єкт, предмет, методи дослідження, наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, особистий внесок дисертантки, перелік публікацій та апробацію результатів дисертаційного дослідження.

У **першому розділі** наведено необхідний теоретичний матеріал і зроблено огляд відомих результатів, що стосуються тематики дисертаційного дослідження.

У **другому розділі** досліджено властивості зліченно-породжених топологічних алгебр аналітичних функцій на комплексних банахових просторах. Зокрема, доведено теорему про обчислення радіус-функції лінійного функціонала для підалгебри алгебри Фреше всіх цілих функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на комплексному банаховому просторі X , такої, що для кожної функції, яка належить цій підалгебрі, усі члени її ряду Тейлора теж належать підалгебрі. Також розглянуто алгебру Фреше $H_{bP}(X)$ цілих функцій обмеженого типу, породжену зліченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів P , та досліджено низку її властивостей. Встановлено загальний вигляд елементів алгебри $H_{bP}(X)$. Показано, що кожний характер алгебри $H_{bP}(X)$ визначається своїми значеннями на елементах множини P , тобто існує взаємно однозначна відповідність між спектром алгебри $H_{bP}(X)$ і деякою множиною послідовностей комплексних чисел. Доведено верхню оцінку для послідовностей із цієї множини. Розглянуто мінімальні алгебри з одиницями $P_P(X)$ та $P_Q(Y)$, породжені послідовностями P та Q алгебраїчно незалежних n -однорідних поліномів з одиничними нормами на комплексних банахових просторах X та Y відповідно. Встановлено умови, за яких алгебраїчний ізоморфізм $J_0: P_P(X) \rightarrow P_Q(Y)$, де $J_0: P_n \rightarrow Q_n$, може бути продовжений до топологічного ізоморфізму $J_b: H_{bP}(X) \rightarrow H_{bQ}(Y)$ або до топологічного ізоморфізму $J: H_P(X) \rightarrow H_Q(Y)$, де $H_P(X)$ та $H_Q(Y)$ є алгебрами усіх цілих функцій на просторах X та Y відповідно такими, що усі члени рядів Тейлора їх функцій належать алгебрам $P_P(X)$ та $P_Q(Y)$ відповідно.

У **третьому розділі** побудовано опис спектра алгебри Фреше $H_{bP}(X)$ для деякого спеціального вигляду поліномів P у випадку, коли простір X є замкненим підпростором простору ℓ_∞ усіх обмежених послідовностей комплексних чисел і

містить простір c_{00} всіх фінітних послідовностей комплексних чисел. Також досліджено спектр алгебри Фреше $H_{bP}(\ell_1)$ для деякого спеціального вигляду поліномів P . Також у даному розділі досліджено операції зсуву, які здійснюються на спектрах алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених сукупностями поліномів деякого спеціального вигляду на просторах ℓ_p , де $p \geq 1$.

У **четвертому розділі** встановлено умови ізоморфізму алгебр Фреше цілих функцій обмеженого типу, породжених послідовностями неперервних алгебраїчно незалежних однорідних поліномів на комплексних банахових просторах. Побудовано ізоморфізм алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі $L_\infty[0, 1]$ та алгебри усіх цілих функцій обмеженого типу, породженої зліченною множиною однорідних поліномів на комплексному банаховому просторі ℓ_∞ .

У **п'ятому розділі** досліджено які алгебраїчні базиси існують в алгебрі $P_P(X)$ усіх поліномів, які є алгебраїчними комбінаціями неперервних алгебраїчно незалежних комплекснозначних n -однорідних поліномів одиничної норми на комплексному банаховому просторі X , і в якому вигляді їх можна подати. Побудовано приклад зліченно-породженої алгебри, в якій усі нормовані алгебраїчні базиси однорідних поліномів є еквівалентними.

Загальні висновки логічно впливають з викладеного у дисертаційній роботі матеріалу і вказують на реалізацію поставлених завдань дослідження та визначають його наукову цінність.

Список використаних джерел містить сучасні посилання на роботи провідних вітчизняних та закордонних вчених.

У **додатку** наведено список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Відсутність порушення академічної доброчесності. У відповідності до Положення про запобігання академічного плагіату та іншим порушенням академічної доброчесності у навчальній та науково-дослідній роботі здобувачів освіти Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, дисертаційна робота пройшла перевірку на відсутність академічного плагіату, що свідчить про дотримання авторкою норм академічної доброчесності та наукової етики у процесі проведення дослідження та публікації його результатів.

Наукова новизна дисертаційної роботи. Усі результати дисертаційної роботи є новими. У роботі вперше досліджено спектри деяких зліченно-породжених алгебр на комплексних банахових просторах послідовностей, встановлено умови при яких такі алгебри ізоморфні, досліджено алгебраїчні базиси в зліченно-породжених алгебрах поліномів.

Ступінь обґрунтованості та достовірності положень, висновків і рекомендацій, сформульованих в дисертації. Отримані результати є достовірними і строго обґрунтованими, у чому можна переконатися завдяки правильним доведенням усіх результатів, наведених у дисертаційній роботі. Висновки є аргументованими.

Повнота відображення в опублікованих роботах наукових положень, висновків та рекомендацій. Основні результати дисертаційної роботи в повній мірі викладені у публікаціях, 5 з яких опубліковані у журналах, які індексуються

наукометричними базами даних Scopus та/або Web of Science Core Collection, а також 13 публікацій опубліковані у матеріалах тез доповідей міжнародних та всеукраїнських конференцій. Публікації відтворюють основний зміст дисертації, об'єм та характер дослідження.

Рекомендації по використанню результатів дисертації. Дисертація носить теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в теорії поліномів на банахових просторах, теорії аналітичних функцій на банахових просторах і теорії алгебр Фреше.

Зауваження до змісту та тексту дисертації.

Відзначимо, також, деякі зауваження.

1. На ст. 88, 89, 92 та ін. використовується формулювання “функція є добре визначеною”. Термін “well defined” слід перекладати як “коректно визначений”, а не “добре визначений.”
2. На ст. 6, 27, 29, 100, 107, 130, 132 замість “дослідження умов ізоморфізму топологічних алгебр” слід використовувати термін “ізоморфності” або ж писати “дослідження умов існування ізоморфізму топологічних алгебр ”.
3. На ст. 3, 7, 39, 52, 57, 66, 78 та ін. є незначні граматичні помилки та описки, а також кальки при перекладі з англійської мови.
4. На ст. 39, 54, 59 та ін. замість “Позначимо M множину...,” “Позначимо $P(X)$ алгебру...” і т.п. слід писати “Позначимо через M множину...” або “Нехай M – множина...”.
5. На ст. 68 сім'ю Ψ_λ названо сім'єю “виключних” характерів. Коректніше використовувати термін “виняткових” характерів.
6. На ст. 130 “ n -однорідні поліноми” слід писати через дефіс, а не через тире.
7. У дисертаційній роботі в багатьох формулах при переносах знаки присутні як зліва, так і справа, в той час як в інших формулах знаки є тільки з лівого боку.


Проте ці зауваження не применшують загального хорошого враження від дисертаційної роботи.

Загальний висновок щодо відповідності дисертації встановленим вимогам. Дисертаційна робота виконана на високому науковому рівні і є самостійною та завершеною науковою працею. Вважаю, що дисертаційна робота «Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах, породжені зліченною множиною твірних елементів» за актуальністю тематики, обсягом виконаної роботи, новизною і науковою цінністю отриманих результатів повністю відповідає вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами від 21.03.2022 р. №341), а її авторка, Василюшин

Світлана Ігорівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

кандидат фізико-математичних наук,
старший дослідник, керівник відділу
аналізу, геометрії та топології Інституту
прикладних проблем механіки і математики
імені Я. С. Підстригача НАН України



Ірина ЧЕРНЕГА

