## АНОТАЦІЯ

*Чоп'юк Ю. Ю.* Аналіз в кільцях мультимножин, породжених алгебрами суперсиметричних поліномів на банахових просторах. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2025. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2025.

Дисертаційна робота виконана в рамках теорії симетричних поліномів на банахових просторах і присвячена дослідженню кілець мультимножин, породжених алгебрами суперсиметричних та $\omega_n$-симетричних поліномів на банахових просторах.

Дослідження симетричних поліномів на банахових просторах набули значного розвитку завдяки працям багатьох математиків, зокрема А. Немировського, С. Семенова, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, І. Чернеги, Т. Василишина, С. Василишин, Ф. Джавад, В. Кравців та інших. Одним із ключових аспектів цього напряму є вивчення спектральних властивостей алгебр симетричних аналітичних функцій та їх зв'язок із групами симетрії. Структура спектра алгебри симетричних аналітичних функцій значною мірою залежить як від вибору простору, так і від властивостей групи або напівгрупи симетрії що діють на цьому просторі. Цей результат особливо важливий, оскільки він демонструє, що для різних класів банахових просторів існують принципово відмінні підходи до опису симетричних аналітичних функцій.

Для просторів $\ell_p$ (де $1 \le p < \infty$) структура спектра значно складніша. У цьому випадку група симетрії формується перестановками координат векторів, що призводить до розширення спектральних вла-

стивостей алгебр симетричних аналітичних функцій. Як показано у дослідженнях І. Чернеги, П. Галіндо та А. Загороднюка, спектр таких просторів містить не лише функціонали значень у точках, а й додаткові структурні елементи, які можна охарактеризувати через алгебраїчні операції та їх властивості. А. Загороднюком та іншими було встановлено, що на спектрі алгебр у цих просторах можна природно ввести структуру комутативного напівкільця з одиницею. Така структура забезпечує нові методи аналізу симетричних поліномів, розширюючи їх застосування у функціональному аналізі.

В рамках дослідження властивостей банахових просторів важливою є проблема опису структури ядер квадратичних функціоналів. Т. Банах, А. Плічко та А. Загороднюк дослідили питання про нулі квадратичних функціоналів на несепарабельних просторах.

Важливими аспектами дисертаційного дослідження є встановлення гомоморфізмів та ізоморфізмів між досліджуваними кільцевими структурами та відомими класичними кільцями. Робота також має на меті інтеграцію отриманих результатів у потенційні застосування в криптографії.

Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження та визначено її зв’язок із науково-дослідними роботами й проєктами, визначено об’єкт і предмет дослідження, сформульовано мету й завдання, окреслено методи дослідження. Окремо виділено наукову новизну, практичну цінність отриманих результатів та особистий внесок автора. Наприкінці наведено інформацію про публікації та апробацію основних результатів дисертаційної роботи.

У першому розділі здійснено огляд літератури та викладено теоретичні основи дослідження. Зокрема підрозділ 1.1 присвячено історичному розвитку ідеї симетричних поліномів, починаючи від класичних досліджень Вієта і Ньютона і закінчуючи сучасними підходами у теорії інваріантів. Завдяки цьому було сформовано комплексний концептуальний каркас, який показує еволюцію понять і методів, що лягли в основу сучасних алгебраїчних побудов. Підрозділ 1.2 містить формалізацію основних понять, тут викладено ключові означення, теореми й підходи, які формують структуру подальших дослідницьких кроків.

Другий розділ присвячено аналізу кілець $\mathcal{M}^{\omega_2}$, $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ та $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$.

У підрозділі 2.1 обґрунтовано, що на відміну від $\mathcal{M}^{\omega_2}$, кільце $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ є областю цілісності. Також доведено факт існування представлення одиничного елемента як цілої лінійної комбінації скінченної кількості елементів із $\mathcal{Z}^{\omega_2}$, поліноми яких не мають спільних нулів.

У підрозділі 2.2 розглянуто питання розв'язності алгебраїчних рівнянь у кільці $\mathcal{M}^{\omega_2}(\mathbb{K})$, де $\mathbb{K}$ є замкненою щодо множення підмножиною комплексного лінійного простору. Показано, що рівняння вигляду $[a][u] = [b]$ можуть мати нескінченну кількість розв'язків або бути взагалі нерозв'язними залежно від властивостей елемента $[a]$. Показано, що якщо $[a] \in \mathcal{M}^{\omega_2}$ не є дільником нуля, і рівняння $[a][u] = [b]$ має розв'язок $[u]$, тоді цей розв'язок єдиний.

У підрозділі 2.3 встановлено ізоморфізм між $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ та кільцем скінченних рядів Діріхле $D_0(\mathbb{Z})$. Запропонована відповідність дає змогу інтегрувати у теорію мультимножин класичні результати та методи дослідження з теорії рядів Діріхле.

У підрозділі 2.4 досліджуються скінченні кільця мультимножин $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$, які утворюються за допомогою відношення еквівалентності на $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ «по модулю $(p, q)$». Показано, що $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$ є комутативним кільцем з одиницею. Встановлено, що потужність множини $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$ дорівнює $p^{q-1}$, а у випадку $q = 2$ це кільце ізоморфне $\mathbb{Z}_p$. Запроваджено відображення $\mathcal{I}_{(p,q)} : \mathcal{Z}^{\omega_2} \to \mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$, яке є кільцевим гомоморфізмом.

У підрозділі 2.5 досліджено деякі умови оборотності елементів у скінченних кільцях $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$. Зокрема, доведено, що таке кільце є полем тоді й лише тоді, коли $q = 2$ і $p$ є простим числом. Встановлено низку тверджень про оборотність «тривіальних» елементів та існування нетривіальних оборотних елементів. Показано, як наявність (або відсутність) нільпотентних елементів впливає на структуру $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$. Розглянуто, як із суми оборотного елемента $\mathbf{m}$ із нільпотентним $\mathbf{k}$ отримати обернений. Узагальнено малу теорему Ферма на кільця $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,p)}$, де $p$ — просте число. Показано, що якщо $p$ — просте число, то в $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,p)}$ немає ненульових нільпотентних елементів.

Розділ 3 присвячено побудові розширення кільця $\mathcal{M}^{\omega_2}$ за рахунок уявної одиниці, унаслідок чого формується нове кільце $\mathcal{M}^{\omega_4}$. Робота мотивується аналогією з кільцем комплексних чисел, де додавання уявної частини дозволяє істотно розширити можливості алгебраїчних конструкцій.

У підрозділі 3.1 описано введення «уявної» зовнішньої одиниці $\mathcal{I}$ та демонструється, що елемент $\left[(y|x)\right] + \mathcal{I}\left[(t|s)\right]$ можна розглядати як аналог $a + bi$ у класичних комплексних числах. Зокрема, показано, що для всіх $[z], [z'] \in \mathcal{M}^{\omega_4}$ рівність $[z] = [z']$ виконується тоді й лише тоді, коли одночасно $\Re[z] = \Re[z']$ та $\Im[z] = \Im[z']$.

У підрозділі 3.2 з'ясовано, що $\mathcal{M}^{\omega_4}$ є ізоморфним кільцю матриць $M_2^0(\mathcal{M}^{\omega_2})$. Ця побудова узагальнює класичний випадок відображення

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Наведено умову оборотності елементів $\mathcal{M}^{\omega_4}$, зокрема випадок, коли $(\Re[z])^2 + (\Im[z])^2$ є оборотним у $\mathcal{M}^{\omega_2}$, що забезпечує оборотність самого

$[z]$ у $\mathcal{M}^{\omega_4}$.

Четвертий розділ присвячено узагальненню дослідження введенням поняття $\omega_n$-симетричних поліномів та побудові відповідних кільцевих структур мультимножин, що взаємопов'язані зі скінченними циклічними групами.

У підрозділі 4.1 вводиться поняття $\omega_n$-симетричних поліномів на банахових просторах $\ell_1(N_{\omega_n})$, де $\omega_n$ є групою коренів $n$-го степеня з одиниці. Розглянуто степеневі поліноми $\Omega_k^{(n)}$, які узагальнюють класичні симетричні та суперсиметричні степеневі поліноми ($n = 1$ і $n = 2$ відповідно). Показано, що операції «симетричного додавання» ($\bullet$) та «симетричного множення» ($\diamond$) можна продовжити на цей випадок, зокрема зберігаючи при цьому бажані алгебраїчні властивості (наприклад, $\Omega_k^{(n)}(x \diamond y) = \Omega_k^{(n)}(x)\,\Omega_k^{(n)}(y)$).

Підрозділ 4.2 демонструє, що поліноми $\Omega_k^{(n)}$ для $k \in \mathbb{N}$ утворюють алгебраїчний базис алгебри $\omega_n$-симетричних поліномів $P_s(\ell_1(N_{\omega_n}))$. Проілюстровано зв'язок поліномів $\Omega_k^{(n)}$ з відомими базисами елементарних та повних симетричних поліномів за допомогою формул Ньютона і відповідних твірних функцій. Показано, як застосування оператора $\Lambda_{\omega_n}$ узагальнює обчислення у випадку $\omega_2$ на довільне $\omega_n$.

У підрозділі 4.3 введено і досліджено кільце мультимножин $\mathcal{M}^{\omega_n}$, породжене $\omega_n$-симетричними поліномами, як множину класів еквівалентності за відношенням «рівності значень усіх $\Omega_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$». Показано, що $\mathcal{M}^{\omega_n}$ є комутативним кільцем з одиницею, якщо $n \geq 2$, і напівкільцем для $n = 1$, у якому $\Omega_k^{(n)}$ задають гомоморфізми до $\mathbb{C}$.

Підрозділ 4.4 присвячено структурному аналізу кільця цілих мультичисел $\mathcal{Z}^{\omega_n}$ як підкільця $\mathcal{M}^{\omega_n}$, де розроблено методи факторизації елементів кільця $\mathcal{Z}^{\omega_n}$ і розглянуто його алгебраїчні властивості. Для простого $n$ або $n = 4$ доведено існування ізоморфізму $\mathcal{Z}^{\omega_n}$ з кільцем $\omega_n\mathbb{Z}_+[\mathbb{C}^\infty]$, що унаочнює відсутність дільників нуля та підтверджує, що

$\mathcal{Z}^{\omega_n}$ є областю цілісності.

П'ятий розділ завершує роботу демонстрацією двох напрямків застосування та узагальнення отриманих результатів.

У підрозділі 5.1 наведено приклади використання «мультичислової» арифметики для побудови криптографічних схем, у яких публічні та приватні ключі задаються оборотними елементами в кільцях $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$. Показано, що складність обчислення обернених елементів та часткове (модульне) зведення компонент у цих кільцях можуть підвищувати криптостійкість порівняно зі звичайною арифметикою в $\mathbb{Z}_p$.

У підрозділі 5.2 розглянуто інше можливе узагальнення симетричних поліномів на випадок поліномів у просторах інтегровних функцій на відрізку. У цьому випадку група симетрій породжується вимірними автоморфізмами відрізка. Запропонований підхід дозволить, в подальшому, поширити результати, отримані у попередніх розділах, на континуальний випадок. У цьому підрозділі доведено, що кожен $n$-блочно-симетричний неперервний $N$-однорідний поліном на цих просторах може бути представлений через базисні елементи $G_{k,n,X}$, причому єдиним чином.

Ключові слова: симетричні поліноми, твірні функції, аналітичні (голоморфні) функції, симетричні аналітичні функції, група, група перестановок, кільце мультимножин, область цілісності, алгебраїчні базиси, степеневі ряди, збіжність, відповідність, комбінаторне доведення, алгоритм, криптографія.

## ABSTRACT

*Chopiuk Y. Y.* Analysis in Rings of Multisets Generated by Algebras of Supersymmetric Polynomials on Banach Spaces. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

A Thesis for a Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 — Mathematics. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2025. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2025.

The dissertation is carried out within the framework of the theory of symmetric polynomials on Banach spaces and is devoted to the study of rings of multisets generated by algebras of supersymmetric and $\omega_n$-symmetric polynomials on Banach spaces.

The study of symmetric polynomials on Banach spaces has seen significant development thanks to the work of many mathematicians, including A. Nemirovskiy, S. Semenov, R. Aron, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, I. Chernega, T. Vasylyshyn, S. Vasylyshyn, F. Jawad, V. Kravtsiv, and others. One of the key aspects of this research direction is the investigation of the spectral properties of algebras of symmetric analytic functions and their relationship with symmetry groups. The structure of the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions depends significantly on both the choice of the space and the properties of the group or semigroup of symmetries acting on that space. This result is particularly important as it demonstrates that for different classes of Banach spaces there exist fundamentally different approaches to describing symmetric analytic functions.

For the spaces $\ell_p$ (where $1 \le p < \infty$), the structure of the spectrum is considerably more complex. In this case, the symmetry group is formed by permutations of the coordinates of vectors, which leads to an expansion of the spectral properties of the algebras of symmetric analytic functions. As shown

in the works of I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk, the spectrum of such spaces contains not only point evaluation functionals but also additional structural elements that can be characterized through algebraic operations and their properties. A. Zagorodnyuk and others have established that one can naturally introduce the structure of a commutative semiring with unity on the spectrum of the algebras in these spaces. Such a structure provides new methods for analyzing symmetric polynomials, thereby broadening their applications in functional analysis.

Within the study of Banach space properties, an important problem is the description of the structure of kernels of quadratic functionals. T. Banakh, A. Plichko, and A. Zagorodnyuk investigate zeros of quadratic functionals on non-separable spaces.

An important aspect of the dissertation is the establishment of homomorphisms and isomorphisms between the studied ring structures and well-known classical rings. The work also aims to integrate the obtained results into potential applications in cryptography.

The dissertation consists of an introduction, five chapters, conclusions for each chapter, general conclusions, a list of references, and an appendix that contains the author's publication list and details regarding the validation of the dissertation results.

In the introduction, the relevance of the research topic is justified and its connection with previous research works and projects is established. The object and subject of the study are defined, the aim and objectives are formulated, and the research methods are outlined. In addition, the scientific novelty, the practical value of the obtained results, and the author's personal contribution are highlighted. At the end, information about the publications and the validation of the main results of the dissertation is provided.

In the first chapter, a review of the literature is conducted and the theoretical foundations of the research are presented. In particular, Subsection 1.1 is devoted to the historical development of the idea of symmetric polynomials, beginning with the classical studies of Viète and Newton and culminating in modern approaches in invariant theory. This has resulted in a comprehensive conceptual framework that illustrates the evolution of the concepts and methods underlying modern algebraic constructions. Subsection 1.2 contains the formalization of the basic concepts; here the key definitions, theorems, and approaches that form the structure of subsequent research steps are presented.

Chapter 2 is devoted to the analysis of the rings $\mathcal{M}^{\omega_2}$, $\mathcal{Z}^{\omega_2}$, and $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$.

In Subsection 2.1, it is demonstrated that, unlike $\mathcal{M}^{\omega_2}$, the ring $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ is an integral domain. In addition, the existence of a representation of the unity element as an integral linear combination of a finite number of elements from $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ (where the corresponding polynomials have no common zeros) is established.

Subsection 2.2 examines the solvability of polynomial equations in the ring $\mathcal{M}^{\omega_2}(\mathbb{K})$, where $\mathbb{K}$ is a multiplicatively closed subset of a complex vector space. It is shown that an equation of the form $[a][u] = [b]$ may have either infinitely many solutions or none at all, depending on the properties of the element $[a]$. Moreover, it is proved that if $[a] \in \mathcal{M}^{\omega_2}$ is not a zero divisor and the equation $[a][u] = [b]$ has a solution $[u]$, then that solution is unique.

In Subsection 2.3, an isomorphism is established between $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ and the ring of absolutely convergent Dirichlet series $D_0(\mathbb{Z})$. This correspondence allows classical results and methods from the theory of Dirichlet series to be integrated into the study of multisets.

Subsection 2.4 is devoted to the study of finite rings of multisets $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$, which are constructed using an equivalence relation on $\mathcal{Z}^{\omega_2}$ (“modulo $(p,q)$”). It is shown that $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$ forms a commutative ring with unity; its cardinality is determined to be $p^{q-1}$, and in the special case $q = 2$ the ring is isomorphic to $\mathbb{Z}_p$. A mapping $\mathcal{I}_{(p,q)} : \mathcal{Z}^{\omega_2} \to \mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$ is introduced, which is a ring homomorphism.

Finally, subsection 2.5 investigates various conditions for the invertibility of elements in the finite rings $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$. In particular, it is proved that such a ring is a field if and only if $q = 2$ and $p$ is a prime number. Several results concerning the invertibility of both “trivial” and nontrivial elements are established. The analysis shows how an inverse can be obtained from the sum of an invertible element $\mathbf{m}$ and a nilpotent element $\mathbf{k}$. An extension of Fermat’s little theorem to the ring $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,p)}$ (with $p$ prime) is also presented, and it is shown that if $p$ is prime, then $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,p)}$ contains no nonzero nilpotent elements.

Chapter 3 is devoted to the construction of an extension of the ring $\mathcal{M}^{\omega_2}$ by introducing an external imaginary unit, which leads to the formation of a new ring $\mathcal{M}^{\omega_4}$. The work is motivated by the analogy with the field of complex numbers, where the addition of the imaginary part significantly expands the possibilities of algebraic constructions.

In Section 3.1, the introduction of the external imaginary unit $\mathcal{I}$ is described. It is shown that every element of $\mathcal{M}^{\omega_4}$ can be represented in the form $[z] = [(y|x)] + \mathcal{I}\,[(t|s)]$, which is analogous to writing a complex number in the form $a+bi$. In particular, it is demonstrated that two elements $[z]$ and $[z']$ in $\mathcal{M}^{\omega_4}$ are equal if and only if both their real parts and their imaginary parts coincide, i.e., $\mathfrak{R}[z] = \mathfrak{R}[z']$ and $\mathfrak{I}[z] = \mathfrak{I}[z']$.

In Section 3.2, it is established that the ring $\mathcal{M}^{\omega_4}$ is isomorphic to the matrix ring $M_2^0(\mathcal{M}^{\omega_2})$. This construction generalizes the classical mapping

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Furthermore, a condition for the invertibility of elements in $\mathcal{M}^{\omega_4}$ is provided: if $(\mathfrak{R}[z])^2 + (\mathfrak{I}[z])^2$ is invertible in $\mathcal{M}^{\omega_2}$, then the element $[z]$ is invertible in $\mathcal{M}^{\omega_4}$.

Chapter 4 is devoted to a generalization of the study by introducing the concept of $\omega_n$-symmetric polynomials and constructing the corresponding ring structures of multisets, which are interrelated with finite cyclic groups.

In Section 4.1, the notion of $\omega_n$-symmetric polynomials on the Banach spaces $\ell_1(N_{\omega_n})$ is introduced, where $\omega_n$ is the group of $n$th roots of unity. Power polynomials $\Omega_k^{(n)}$ are considered, which generalize the classical symmetric and supersymmetric power polynomials (corresponding to $n = 1$ and $n = 2$, respectively). It is shown that the operations of «symmetric addition» ($\bullet$) and «symmetric multiplication» ($\diamond$) can be extended to this setting while preserving the desired algebraic properties (for example, $\Omega_k^{(n)}(x \diamond y) = \Omega_k^{(n)}(x)\,\Omega_k^{(n)}(y)$).

Section 4.2 demonstrates that the polynomials $\Omega_k^{(n)}$, for $k \in \mathbb{N}$, form an algebraic basis of the algebra of $\omega_n$-symmetric polynomials $P_s(\ell_1(N_{\omega_n}))$. The connection between the polynomials $\Omega_k^{(n)}$ and the well-known bases of elementary and complete symmetric polynomials is illustrated by means of Newton's formulas and the corresponding generating functions. It is shown that the use of the operator $\Lambda_{\omega_n}$ generalizes the calculations in the case of $\omega_2$ to an arbitrary $\omega_n$.

In Section 4.3, the ring of multisets $\mathcal{M}^{\omega_n}$ generated by the $\omega_n$-symmetric polynomials is introduced and studied as the set of equivalence classes under the relation of equality of the values of all $\Omega_k^{(n)}$ (for $k \in \mathbb{N}$). It is proved that $\mathcal{M}^{\omega_n}$ is a commutative ring with unity if $n \geq 2$ and a semiring for $n = 1$, in which the mappings $\Omega_k^{(n)}$ define homomorphisms into $\mathbb{C}$.

Section 4.4 is devoted to a structural analysis of the ring of integer multinumbers $\mathcal{Z}^{\omega_n}$ as a subring of $\mathcal{M}^{\omega_n}$. Methods for factorizing the elements of $\mathcal{Z}^{\omega_n}$ are developed and its algebraic properties are examined. For prime $n$ or $n = 4$, it is proved that there exists an isomorphism between $\mathcal{Z}^{\omega_n}$ and the ring $\omega_n\mathbb{Z}_+[\mathbb{C}^\infty]$, which illustrates the absence of zero divisors and confirms that $\mathcal{Z}^{\omega_n}$ is an integral domain.

Chapter 5 concludes the work by demonstrating two directions of application and generalization of the obtained results.

In Section 5.1, examples of the use of multinumber arithmetic for the construction of cryptographic schemes are presented, in which public and private keys are given by invertible elements in the rings $\mathcal{Z}^{\omega_2}_{(p,q)}$. It is shown that the complexity of computing inverse elements and the partial (modular) reduction of components in these rings can enhance cryptographic security compared to conventional arithmetic in $\mathbb{Z}_p$.

In Section 5.2, another possible generalization of symmetric polynomials is considered for the case of polynomials in spaces of integrable functions on an interval. In this case, the symmetry group is generated by measurable automorphisms of the interval. The proposed approach will, in the future, allow the extension of the results obtained in previous chapters to the continuous case. In this section, it is proved that every $n$-block-symmetric continuous $N$-homogeneous polynomial on these spaces can be represented uniquely through the basis elements $G_{k,n,X}$.

Keywords: symmetric polynomials, generating functions, analytic (holomorphic) functions, symmetric analytic functions, group, permutation group, ring of multisets, integral domain, algebraic basis, power series, convergence, correspondence, combinatorial proof, algorithm, cryptography.

## Список публікацій здобувача, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Chopyuk Y., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Rings of multisets and integer multinumbers // Mathematics. — 2022. — 10(5). — 778.
   DOI:https://doi.org/10.3390/math10050778
   URL:https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85126271663&origin=resultslist
   ISSN: 2227-7390
2. Zagorodnyuk A., Baziv N., Chopyuk Y., Vasylyshyn T., Burtnyak I., Kravtsiv V. Symmetric and supersymmetric polynomials and their applications in blockchain technology and neural networks // IEEE World Conference on Applied Intelligence and Computing (AIC). — 2023. — P. 508 - 513.
   DOI:https://doi.org/10.1109/AIC57670.2023.10263936
   URL:https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85174541282&origin=resultslist
3. Burtnyak I., Chopyuk Y., Vasylyshyn S., Vasylyshyn T. Algebras of Weakly Symmetric Functions on Spaces of Lebesgue Measurable Functions // Carpathian Math. Publ. — 2023. — 15(2). — P. 411 - 419.
   DOI:https://doi.org/10.15330/cmp.15.2.411-419
   URL:https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85180673959&origin=resultslist
   ISSN: 2075-9827
4. Chopiuk Y., Zagorodnyuk A. Symmetric functions and rings of multinumbers associated with finite groups // Symmetry. — 2025. — 17(1). — 33.
   DOI:https://doi.org/10.3390/sym17010033
   URL:https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85215821960&origin=resultslist

ISSN: 2073-8994

## Список публікацій здобувача, що підтверджують апробацію матеріалів дисертації

1. Zagorodnyuk A., Chopyuk Y. Symmetric polynomials on Banach spaces and rings of multisets // International Online Conference «Current Trends in Abstract and Applied Analysis» (Ivano-Frankivsk, May 12 – 15, 2022): book of abstracts. — P. 87 - 88.
2. Zagorodnyuk A., Baziv N., Chopyuk Y., Vasylyshyn T., Burtnyak I., Kravtsiv V. Symmetric and supersymmetric polynomials and their applications in blockchain technology and neural networks // IEEE World Conference on Applied Intelligence and Computing (AIC). — 2023. — P. 508 - 513.
3. Chopiuk Y. Rings of Multisets and Integer Multinumbers // 1st School-Conference «Numbers in the universe: Recent advances in number theory and its applications», Organized by the International Center for Mathematics in Ukraine (Kyiv & Warsaw, August 7 – 11, 2023): book of abstracts — P. 2.
4. Chopiuk Y., Zagorodnyuk A. Rings of multinumbers associated with the complex structure // V International Conference Dedicated to the 145th Anniversary of Hans Hahn’s Birth (Chernivtsi, September 23 – 27, 2024): book of abstracts. — P. 119 – 120.