АНОТАЦІЯ

Грибель О.Б. Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика (галузь знань 11 — Математика та статистика). — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2025. — Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2025.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, зосереджено увагу на науковій новизні одержаних результатів, відзначено теоретичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, наведено дані щодо апробації та публікацій результатів роботи.

Метою дослідження є опис асимптотичних властивостей суми ряду Діріхле в термінах послідовності його коефіцієнтів. Об'єктом дослідження є цілі та абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$.

Основну увагу в роботі сконцентровано на отримані умов на послідовність модулів коефіцієнтів $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ ряду Діріхле, за яких для його суми виконується та чи інша загальна асимптотична оцінка зверху.

У розділі 1 наведено огляд літератури за тематикою дослідження, проведено аналіз відомих результатів, що безпосередньо стосуються теми дисертації, та обґрунтовано вибір напрямків дослідження.

Розділ 2 присвячено встановленню умов виконання різноманітних оцінок для суми цілого ряду Діріхле $F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{s\lambda_n}$. З цією метою для заданого ряду F тут уведено пов'язаний з ним ряд $G_c(s)=\sum_{n=N}^{\infty}b_ne^{s\lambda_n}$, де $c>0$ — фіксоване число, $N=\min\{n\in\mathbb{N}_0 : a_n\neq 0\}$ і $b_n=\sum_{\lambda_n\le\lambda_k<\lambda_n+c}|a_k|$ для всіх цілих $n\ge N$.

У підрозділі 2.1 доведено, що максимальний член $\mu(\sigma,G_c)$ пов'язаного ряду є визначеним для всіх $\sigma\in\mathbb{R}$ і дає в певному сенсі добру апроксимаційну оцінку для суми ряду F, а саме: для довільних $\sigma\ge 0$ і $\varepsilon>0$ маємо

$$\mu(\sigma,G_c)\le\mathfrak{M}(\sigma,F)\le\frac{\mu(\sigma+\varepsilon,G_c)}{e^{\varepsilon\lambda_N}}\left(\frac{e^{\varepsilon c}}{e^{\varepsilon c}-1}+\frac{\sigma}{\varepsilon}\right),$$

де $\mathfrak{M}(\sigma,F)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$ для кожного $\sigma\in\mathbb{R}$.

Нехай Ψ — неперервна в околі $+\infty$ функція така, що $\Psi(\sigma)/\sigma\to+\infty$, якщо $\sigma\to+\infty$, $\widetilde{\Psi}$ — функція, спряжена з Ψ за Юнгом, ψ — правобічна похідна від $\widetilde{\Psi}$, h — неспадна, неперервна, необмежена зверху в деякому околі точки $+\infty$ функція така, що $\ln x\le h(\Psi(\psi(x)))$ для всіх достатньо великих $x\in\mathbb{R}$, а $\Delta=\overline{\lim}_{x\to+\infty}\ln x/\Psi(\psi(x))$.

У підрозділі 2.3, зокрема, доведено, що якщо для всіх достатньо великих $\sigma\in\mathbb{R}$ виконується нерівність $\ln\mu(\sigma,G_c)\le\Psi(\sigma)$, то для кожного $\varepsilon>0$ правильні асимптотичні співвідношення $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F)-\Psi(\sigma+\varepsilon)-\ln\sigma\to-\infty$ і $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F)\le\Psi(\sigma)+h(\Psi(\sigma)+\varepsilon)+\ln\sigma+\varepsilon-\ln\varepsilon+o(1)$, якщо $\sigma\to+\infty$.

Підрозділ 2.4 містить результати, що дають необхідні та достатні умови на послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$, за яких для цілого ряду Діріхле F виконуються деякі загальні асимптотичні оцінки. Наприклад, тут доведено, що для того, щоб існувало число $\varepsilon>0$ таке, що $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F)\le\Psi(\sigma+\varepsilon)+\varepsilon\sigma$ для всіх достатньо великих $\sigma\in\mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб існувало число $\delta>0$ таке, що $\ln|b_n|\le-\widetilde{\Psi}(\lambda_n-\delta)+\delta(\lambda_n-\delta)$ для всіх достатньо великих невід'ємних цілих n, і показано, що для кожного $\varepsilon>0$ і всіх достатньо великих $\sigma\in\mathbb{R}$ ми маємо $\ln\mathfrak{M}(\sigma,F)\le\Psi(\sigma+\varepsilon)+\varepsilon\sigma$, якщо і лише якщо для кожного $\delta>0$ і всіх достатньо великих невід'ємних цілих n

виконується нерівність $\ln|b_n| \le -\widetilde{\Psi}(\lambda_n - \delta) + \delta(\lambda_n - \delta)$. Крім того, доведено, що якщо $\Delta < +\infty$, то для того, щоб існувало число $q > 0$ таке, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma)$ для всіх достатньо великих $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб існувало число $p > 0$ таке, що $\ln|b_n| \le -p\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p)$ для всіх достатньо великих невід'ємних цілих n, і показано, що якщо $\Delta = 0$, то для кожного $q > 0$ і для всіх достатньо великих $\sigma \in \mathbb{R}$ ми маємо $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma)$, якщо і лише якщо для кожного $p > 0$ і для всіх достатньо великих невід'ємних цілих n виконується нерівність $\ln|b_n| \le -p\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p)$.

Нехай $\Psi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ — довільна функція, а $q_0 \ge 0$ — деяке число. У підрозділі 2.5 доведено, що для того, щоб для кожного числа $q > q_0$ існувала стала $B \in \mathbb{R}$ така, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(q\sigma) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, необхідно і досить, щоб для кожного числа $p > q_0$ існувала стала $C \in \mathbb{R}$ така, що $\ln b_n \le -\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p) + C$ для всіх цілих $n \ge 0$ ($\widetilde{\Psi}$ — спряжена з Ψ за Юнгом). За додаткових умов на функцію Ψ тут також встановлено необхідні та достатні умови на послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$, за яких для цілого ряду Діріхле F існують додатні сталі q та B такі, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma + B)$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, чи існують дійсні сталі ε і B такі, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, чи для кожного $B > 0$ існує стала $\varepsilon \in \mathbb{R}$ така, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, чи для кожного $\varepsilon > 0$ існує стала $B \in \mathbb{R}$ така, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Ці результати істотно узагальнюють результати, отримані М.М. Шереметою у 1999 р., а знайдені при цьому умови виконання глобальних оцінок записуються у простішій формі.

Аналоги результатів з розділу 2 для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле встановлено у розділі 3. Власне, розділ 3 присвячено встановленню умов виконання загальних оцінок для суми довільного ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a(F) \ge 0$. З цією метою для кожного такого ряду F тут уведено пов'язані з ним ряди $F_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n e^{s\lambda_n}$, де $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ для всіх цілих $n \ge 0$, а також $G_c(s) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n}$, де $c > 0$, $N = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}$ і $b_n = \sum_{\lambda_n - c < \lambda_k \le \lambda_n} |a_k|$ для всіх цілих $n \ge N$.

У підрозділі 3.1 доведено, що максимальні члени $\mu(\sigma, F_2)$ та $\mu(\sigma, G_c)$ пов'язаних рядів є визначеними для всіх $\sigma < 0$ і дають в певному сенсі добрі апроксимаційні оцінки для суми заданого ряду F з $\sigma_a(F) \ge 0$, а саме: для довільних $\sigma \ge 0$ і $\varepsilon \in (0, |\sigma|)$ маємо

$$\mu(\sigma, F_2) \le \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \frac{|\sigma|\mu(\sigma+\varepsilon, F_2)}{\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_0}},$$
$$\mu(\sigma, G_c) \le \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \frac{\mu(\sigma+\varepsilon, G_c)}{e^{\varepsilon\lambda_N}} \left(\frac{|\sigma|}{\varepsilon} + \frac{1}{e^{\varepsilon(\lambda_L - \lambda_N)}} + \frac{1}{e^{\varepsilon c} - 1} \right),$$

де $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma\lambda_n}$ для кожного $\sigma < 0$.

Нехай Ψ — неперервна на $[a, 0)$ функція така, що $\Psi(\sigma) \to +\infty$, якщо $\sigma \uparrow 0$, $\widetilde{\Psi}$ — функція, спряжена з Ψ за Юнгом, ψ — правобічна похідна від $\widetilde{\Psi}$, h — неспадна, неперервна, необмежена зверху в деякому околі точки $+\infty$ функція така, що $\ln x \le h(\Psi(\psi(x)))$ для всіх достатньо великих $x \in \mathbb{R}$.

У підрозділі 3.2, зокрема, доведено, що якщо $q := \underline{\lim}_{x \to +\infty} |\psi(x)| x > 0$ і $\ln \mu(\sigma, F_2) \le \Psi(\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, то для кожного додатного $\eta < (\sqrt{q+1} - 1)/(\sqrt{q+1} + 1)$ і для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0 правильна нерівність $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\eta\sigma)$. Якщо ж $\ln \mu(\sigma, H_c) \le \Psi(\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, то для кожного $\varepsilon > 0$ маємо $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma) + h(\Psi(\sigma) + \varepsilon) + \varepsilon - \ln \varepsilon - \ln c + o(1)$, якщо $\sigma \uparrow 0$.

Підрозділ 3.3 складається з результатів, що дають умови на послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$, які є необхідними та достатніми для того, щоб для заданого ряду Діріхле F з $\sigma_a(F) \ge 0$ виконувалась та чи інша загальна асимптотична оцінка. За деяких не надто обтяжливих обмежень знизу на зростання функції ψ тут наведено умови, за яких: існує $\delta \in (0, 1)$ таке, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\delta\sigma)$ для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, або для кожного $\delta \in (0, 1)$ і для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0 виконується нерівність $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\delta\sigma)$, або існує $q > 0$ таке, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma)$

для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0, або для кожного $q > 1$ і для всіх $\sigma < 0$ достатньо близьких до 0 виконується нерівність $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq q\Psi(\sigma)$.

Нехай $\Psi : (-\infty, 0) \to \overline{\mathbb{R}}$ — довільна функція. У підрозділі 3.4 доведено, що для того, щоб існували сталі $q \in (0, 1)$ і $B \in \mathbb{R}$ такі, що нерівність $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(q\sigma) + B$ виконується для всіх $\sigma < 0$, необхідно і досить, щоб існували сталі $p \in (0, 1)$ і $C \in \mathbb{R}$ такі, що $\ln S_n \leq -\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p) + C$ для кожного цілого $n \geq 0$. Крім того, вказано необхідні та достатні умови на $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ (а тому й на $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$), за яких для кожного $q \in (0, 1)$ існує стала $B \in \mathbb{R}$ (чи для кожного $B > 0$ існує стала $q \in (0, 1)$) така, що $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(q\sigma) + B$ для всіх $\sigma < 0$.

У заключному розділі 4 розглянуто деякі відкриті задачі, пов'язані з відносним зростанням ряду Діріхле і його максимального члена.

Нехай $\rho \geq 1$, $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ — невід'ємна зростаюча до $+\infty$ послідовність, $C(1) = +\infty$ і $C(\rho) = \rho/(\rho - 1)$ для кожного $\rho > 1$. У 2003 році П.В. Філевич і М.М. Шеремета знайшли необхідні та достатні умови на послідовність коефіцієнтів довільного цілого ряду Діріхле F, за яких логарифм його максимального члена $\ln \mu(\sigma, F)$ є правильно змінною функцією порядку ρ, а також довели, що умова $\overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln \lambda_n < C(\rho)$ є достатньою для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле F зі заданою системою показників λ логарифм його супремуму модуля $\ln M(\sigma, F)$ і функція $\ln \mu(\sigma, F)$ були одночасно правильно змінними функція порядку ρ. Необхідність наведеної умови обґрунтовано у підрозділі 4.1. Більше того, тут доведено, що якщо $\overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln \lambda_n \geq C(\rho)$, то можна вказати правильно змінну порядку ρ функцію Φ таку, що для довільної додатної на $[a, +\infty)$ функції l існує цілий ряд Діріхле F зі заданою системою показників λ, для якого $\ln \mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$, якщо $\sigma \to +\infty$, і $M(\sigma, F) \geq l(\sigma)$ для всіх $\sigma \geq \sigma_0$.

Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$, α — неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функція, β – неперервна на $[a, A)$ функція така, що $\beta(\sigma) \to +\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$. У підрозділі 4.2 для ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ з абсцисою існування максимального члена $\sigma_e(F) \geq A$ знайдено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма його максимального члена $R^*_{\alpha,\beta}(F) := \overline{\lim\limits_{\sigma\uparrow A}}\, \alpha(\max\{x_0, \ln\mu(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$ за послідовністю $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$: якщо $A < +\infty$, то

$$R^*_{\alpha,\beta}F) = \sup_{\eta\in\Lambda} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(\eta_n)}{\beta\left(\frac{\eta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)},$$

де sup береться за всіма зростаючими до $+\infty$ послідовностями $\eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$; ця формула правильна також і у випадку $A = +\infty$, якщо тільки ряд F не зводиться до експоненційного полінома.

Дослідження зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих (зокрема, узагальнених) порядків проведено у підрозділі 4.3. Нехай α — неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функція, β – неперервна на $[b, 0)$ функція така, що $\beta(\sigma) \to +\infty$, якщо $\sigma \uparrow A$, а γ – додатна неперервна на $[c, 0)$ функція. Для ряду Діріхле F з $\sigma_a(F) \geq 0$ покладемо $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = \overline{\lim}_{\sigma\uparrow 0}\, \alpha(\max\{x_0, \gamma(\sigma)\ln M(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$ і нехай $R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = \overline{\lim}_{\sigma\uparrow 0}\, \alpha(\max\{x_0, \gamma(\sigma)\ln\mu(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$. За додаткових, але загальних припущень щодо функцій порівняння α, β і γ знайдено необхідні та достатні умови на послідовність $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$, за яких $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ для кожного ряду Діріхле вигляду $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ з $\sigma_a(F) \geq 0$, а також встановлено формули для обчислення величини $R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ через послідовність $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$.

Ключові слова: функція, спряжена за Юнгом функція, аналітична функція, поліном, ряд, степеневий ряд, ряд Діріхле, максимальний член, центральний індекс, максимум модуля, супремум модуля, абсциса абсолютної збіжності, абсциса існування максимального члена, узагальнений порядок, апроксимація.

ANNOTATION

Hrybel O.B. Asymptotic estimates of sums of Dirichlet series. — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

A Thesis for a Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 — Mathematics (field of knowledge 11 — Mathematics and statistics). — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2025. — Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2025.

The dissertation consists of an abstract, introduction, four sections, conclusions for each section and general conclusions, bibliography, and an appendix that contains the list of the author's publications and information on the approval of the dissertation's results.

The introduction justifies the relevance of the research topic, highlights the connection of the work with scientific programs, plans, and topics, and formulates the aim, object, subject, tasks, and research methods. It emphasises the scientific novelty of the obtained results, notes the theoretical significance of the results, and outlines the author's contribution. Additionally, the introduction provides information on the approval and publication of the results.

The research aims to describe the asymptotic properties of the sum of a Dirichlet series in terms of the sequence of its coefficients. The object of study is an entire and absolutely convergent Dirichlet series in the half-plane with a non-negative increasing to $+\infty$ system of exponents $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$.

The main focus of the work is on obtaining conditions for the sequence of the moduli of the coefficients $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ of a Dirichlet series, under which certain general upper asymptotic estimates for its sum hold.

Section 1 provides a review of the literature on the research topic, presents an analysis of well-known results related to the topic of the dissertation, and justifies the choice of research directions.

Section 2 focuses on establishing conditions under which various estimates

hold for the sum of the entire Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$. To this end, for a given series F, the associated series $G_c(s) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n}$ is introduced, where $c > 0$ is a fixed constant, $N = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\}$, and $b_n = \sum_{\lambda_n \le \lambda_k < \lambda_n + c} |a_k|$ for all integers $n \geq N$.

In subsection 2.1, it is proven that the maximal term $\mu(\sigma, G_c)$ of the associated series is defined for all $\sigma \in \mathbb{R}$ and provides, in a certain sense, a good approximative estimate for the sum of the series F. Specifically, for any $\sigma \geq 0$ and $\varepsilon > 0$, the following inequality holds:

$$\mu(\sigma, G_c) \leq \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \frac{\mu(\sigma+\varepsilon, G_c)}{e^{\varepsilon\lambda_N}}\left(\frac{e^{\varepsilon c}}{e^{\varepsilon c}-1} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\right),$$

where $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma\lambda_n}$ for each $\sigma \in \mathbb{R}$.

Let Ψ be a continuous function in the neighborhood of $+\infty$ such that $\Psi(\sigma)/\sigma \to +\infty$ as $\sigma \to +\infty$, $\widetilde{\Psi}$ be the Jung-conjugate function of Ψ, ψ be the right-hand derivative of $\widetilde{\Psi}$, and h be a non-decreasing, continuous, unbounded function from above in some neighborhood of the point $+\infty$ such that $\ln x \leq h(\Psi(\psi(x)))$ for all sufficiently large $x \in \mathbb{R}$. Finally, define $\Delta = \overline{\lim}_{x\to+\infty} \ln x/\Psi(\psi(x))$.

In subsection 2.3, it is shown that if the inequality $\ln \mu(\sigma, G_c) \leq \Psi(\sigma)$ holds for all sufficiently large $\sigma \in \mathbb{R}$, then for every $\varepsilon > 0$, the followi-ng asymptotic estimates hold: $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) - \Psi(\sigma+\varepsilon) - \ln\sigma \to -\infty$ and $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma) + h(\Psi(\sigma)+\varepsilon) + \ln\sigma + \varepsilon - \ln\varepsilon + o(1)$ as $\sigma \to +\infty$.

Subsection 2.4 provides necessary and sufficient conditions on the sequence $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ under which certain general asymptotic estimates for the entire Dirichlet series F hold. For example, it is shown that there exists $\varepsilon > 0$ such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma+\varepsilon)+\varepsilon\sigma$ for all sufficiently large $\sigma \in \mathbb{R}$ if and only if there exists $\delta > 0$ such that $\ln |b_n| \leq -\widetilde{\Psi}(\lambda_n-\delta)+\delta(\lambda_n-\delta)$ for all sufficiently large non-negative integers n. It is further established that, for every $\varepsilon > 0$ and all sufficiently large $\sigma \in \mathbb{R}$, the inequality $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \leq \Psi(\sigma+\varepsilon)+\varepsilon\sigma$ holds if and only if, for every $\delta > 0$ and all sufficiently large non-negative integers n, the inequality $\ln|b_n| \le -\widetilde{\Psi}(\lambda_n - \delta) + \delta(\lambda_n - \delta)$ is satisfied. In addition, it is proven that if $\Delta < +\infty$, then there exists $q > 0$ such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma)$ for all sufficiently large $\sigma \in \mathbb{R}$ if and only if there exists $p > 0$ such that $\ln|b_n| \le -p\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p)$ for all sufficiently large non-negative integers n. Finally, it is shown that if $\Delta = 0$, then for every $q > 0$ and all sufficiently large $\sigma \in \mathbb{R}$, the inequality $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma)$ holds if and only if, for every $p > 0$ and all sufficiently large non-negative integers n, the inequality $\ln|b_n| \le -p\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p)$ is satisfied.

Let $\Psi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ be an arbitrary function, and let $q_0 \ge 0$ be a fixed number. In subsection 2.5, it is proven that for every $q > q_0$, there exists a constant $B \in \mathbb{R}$ such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(q\sigma) + B$ for all $\sigma \in \mathbb{R}$, if and only if for every $p > q_0$, there exists a constant $C \in \mathbb{R}$ such that $\ln b_n \le -\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p) + C$ for all $n \ge 0$, where $\widetilde{\Psi}$ denotes the Young conjugate of Ψ. Under additional assumptions on Ψ, it is also established necessary and sufficient conditions on the sequence $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$, under which for the entire Dirichlet series F there exist positive constants q and B such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma + B)$ for all $\sigma \in \mathbb{R}$, or there exist real constants ε and B such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ for all $\sigma \in \mathbb{R}$, or for every $B > 0$ there exists a constant $\varepsilon \in \mathbb{R}$ such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ for all $\sigma \in \mathbb{R}$, or for every $\varepsilon > 0$ there exists $B \in \mathbb{R}$ such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma + \varepsilon) + B$ for all $\sigma \in \mathbb{R}$. These results significantly generalise those obtained by M. M. Sheremeta in 1999, while the conditions for the validity of global estimates are written in a simplified form.

Analogues of the results from section 2 for Dirichlet series that are absolutely convergent in a half-plane are established in section 3. In particular, it derives conditions under which general estimates hold for the sum of an arbitrary Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ with abscissa of absolute convergence $\sigma_a(F) \ge 0$. To this end, for each such series F two associated series are introduced: $F_2(s) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n e^{s\lambda_n}$, where $S_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ for all integers $n \ge 0$, and $G_c(s) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n e^{s\lambda_n}$, where $c > 0$, $N = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \ne 0\}$, and $b_n = \sum_{\lambda_n - c < \lambda_k \le \lambda_n} |a_k|$ for all integers $n \ge N$.

In subsection 3.1, it is proven that the maximal terms $\mu(\sigma, F_2)$ and $\mu(\sigma, G_c)$ of the associated series are well defined for all $\sigma < 0$, and they provide, in a certain sense, accurate approximations for the sum of the Dirichlet series F with $\sigma_a(F) \ge 0$. Specifically, for any $\sigma \ge 0$ and $\varepsilon \in (0, |\sigma|)$, the following inequalities hold:

$$\mu(\sigma, F_2) \le \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \frac{|\sigma|\mu(\sigma+\varepsilon, F_2)}{\varepsilon e^{\varepsilon\lambda_0}},$$

$$\mu(\sigma, G_c) \le \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \frac{\mu(\sigma+\varepsilon, G_c)}{e^{\varepsilon\lambda_N}}\left(\frac{|\sigma|}{\varepsilon} + \frac{1}{e^{\varepsilon(\lambda_L - \lambda_N)}} + \frac{1}{e^{\varepsilon c} - 1}\right),$$

where $\mathfrak{M}(\sigma, F) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| e^{\sigma\lambda_n}$ for every $\sigma < 0$.

Let Ψ be a continuous function on the interval $[a, 0)$ such that $\Psi(\sigma) \to +\infty$ as $\sigma \uparrow 0$. Let $\widetilde{\Psi}$ denote the Young conjugate of Ψ, and let ψ be the right-hand derivative of $\widetilde{\Psi}$. Finally, let h be a nondecreasing, continuous function that is unbounded above in some neighbourhood of $+\infty$, and assume that the inequality $\ln x \le h(\Psi(\psi(x)))$ holds for all sufficiently large $x \in \mathbb{R}$.

In subsection 3.2, it is shown, in particular, that if $q := \underline{\lim}_{x\to+\infty} |\psi(x)|x > 0$ and $\ln \mu(\sigma, F_2) \le \Psi(\sigma)$ for all $\sigma < 0$ sufficiently close to 0, then for every positive $\eta < (\sqrt{q+1} - 1)/(\sqrt{q+1} + 1)$ and for all $\sigma < 0$ sufficiently close to 0, the inequality $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\eta\sigma)$ holds. Moreover, if $\ln \mu(\sigma, H_c) \le \Psi(\sigma)$ for all $\sigma < 0$ sufficiently close to 0, then for each $\varepsilon > 0$ we have $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\sigma) + h(\Psi(\sigma) + \varepsilon) + \varepsilon - \ln \varepsilon - \ln c + o(1)$ as $\sigma \uparrow 0$.

Subsection 3.3 provides conditions on the sequence $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$ that are necessary and sufficient for a given Dirichlet series F with $\sigma_a(F) \ge 0$ to satisfy some general asymptotic estimates. Assuming certain lower bounds on the growth of the function ψ, conditions are established that ensure that there exists $\delta \in (0, 1)$ such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\delta\sigma)$ for all $\sigma < 0$ sufficiently close to 0, or for each $\delta \in (0, 1)$ and for all $\sigma < 0$ sufficiently close to 0 the inequality $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(\delta\sigma)$ holds, or there exists $q > 0$ such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma)$ for all $\sigma < 0$ sufficiently close to 0, or for each $q > 1$ and for all $\sigma < 0$ sufficiently close to 0 the inequality $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le q\Psi(\sigma)$ holds.

Let $\Psi : (-\infty, 0) \to \overline{\mathbb{R}}$ be an arbitrary function. In subsection 3.4 it is proven that there exist constants $q \in (0,1)$ and $B \in \mathbb{R}$ such that the inequality $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(q\sigma) + B$ holds for all $\sigma < 0$, if and only if there exist constants $p \in (0,1)$ and $C \in \mathbb{R}$ such that $\ln S_n \le -\widetilde{\Psi}(\lambda_n/p) + C$ for every integer $n \ge 0$. Moreover, necessary and sufficient conditions are provided on $(S_n)_{n=0}^{\infty}$ (and therefore on $(|a_n|)_{n=0}^{\infty})$ under which, for each $q \in (0,1)$, there exists a constant $B \in \mathbb{R}$ (or for each $B > 0$, there exists a constant $q \in (0,1)$) such that $\ln \mathfrak{M}(\sigma, F) \le \Psi(q\sigma) + B$ for all $\sigma < 0$.

Finally, in section 4, some open problems related to the relative growth of the Dirichlet series and its maximal term are considered.

Let $\rho \ge 1$, $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ be a non-negative sequence increasing to $+\infty$, $C(1) = +\infty$ and $C(\rho) = \rho/(\rho - 1)$ for each $\rho > 1$. In 2003, P.V. Filevych and M.M. Sheremeta established necessary and sufficient conditions on the sequence of coefficients of an arbitrary entire Dirichlet series F under which the logarithm of its maximal term, $\ln \mu(\sigma, F)$, is a regularly varying function of order ρ. It is also proven that the condition $\overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln \lambda_n < C(\rho)$ is sufficient for the logarithm of the supremum of the modulus, $\ln M(\sigma, F)$, and the function $\ln \mu(\sigma, F)$ to be simultaneously regularly varying functions of order ρ for every Dirichlet series F with a given exponent system λ. The necessity of the condition is substantiated in subsection 4.1. Moreover, it is proven that if $\overline{\lim}_{n\to\infty} \ln\ln n/\ln \lambda_n \ge C(\rho)$, then there exists a regularly varying function of order ρ, denoted by Φ, such that for any positive function l defined on $[a, +\infty)$, there exists a Dirichlet series F with a given exponent system λ for which $\ln \mu(\sigma, F) \sim \Phi(\sigma)$ as $\sigma \to +\infty$, and $M(\sigma, F) \ge l(\sigma)$ for all $\sigma \ge \sigma_0$.

Let $A \in (-\infty, +\infty]$, α be a continuous function increasing to $+\infty$ on $[x_0, +\infty)$, and β be a continuous function on $[a, A)$ such that $\beta(\sigma) \to +\infty$ as $\sigma \uparrow A$. In subsection 4.2, for the Dirichlet series $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ with the abscissa of the existence of the maximal term $\sigma_e(F) \ge A$, a Cauchy-Hadamardtype formula is found to calculate the generalised order of the logarithm of its maximal term: $R^*_{\alpha,\beta}(F) := \varlimsup\limits_{\sigma\uparrow A} \alpha(\max\{x_0, \ln\mu(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$ for the sequence $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$. If $A < +\infty$, then

$$R^*_{\alpha,\beta}F) = \sup_{\eta\in\Lambda} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\alpha(\eta_n)}{\beta\left(\frac{\eta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{|a_n|}\right)},$$

where the supremum is taken over all sequences $\eta = (\eta_n)_{n=0}^{\infty}$ increasing to $+\infty$. This formula is also correct for $A = +\infty$, unless the series F reduces to an exponential polynomial.

The study of the growth of absolutely convergent Dirichlet series in the half-plane in terms of modified (in particular, generalised) orders is carried out in subsection 4.3. Let α be a continuous function increasing to $+\infty$ on $[x_0, +\infty)$, β be a continuous function on $[b, 0)$ such that $\beta(\sigma) \to +\infty$ as $\sigma \uparrow A$, and γ be a positive continuous function on $[c, 0)$. For the Dirichlet series F with $\sigma_a(F) \geq 0$, we put $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \alpha(\max\{x_0, \gamma(\sigma)\ln M(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$, and let $R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = \varlimsup_{\sigma\uparrow 0} \alpha(\max\{x_0, \gamma(\sigma)\ln\mu(\sigma, F)\})/\beta(\sigma)$. Under additional general assumptions on the comparison functions α, β and γ, necessary and sufficient conditions are found on the sequence $\lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$, under which $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F) = R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ for each Dirichlet series of the form $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ with $\sigma_a(F) \geq 0$. Furthermore, formulas are established for calculating the value $R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ using the sequence $(|a_n|)_{n=0}^{\infty}$.

Keywords: function, Young conjugate function, analytic function, polynomial, series, power series, Dirichlet series, maximal term, central index, maximum modulus, supremum modulus, abscissa of absolute convergence, abscissa of the existence of the maximal term, generalized order, approximation.

Список публікацій здобувача, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Filevych P.V., Hrybel O.B. The growth of the maximal term of Dirichlet series // Carpathian Math. Publ. — 2018. — Vol. 10, no. 1. — P. 79 – 81.

DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.79-81

URL: https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS:000437802500007

ISSN: 20759827

2. Filevych P.V., Hrybel O.B. On regular variation of entire Dirichlet series // Mat. Stud. — 2023. — Vol. 58, no. 2. — P. 174 – 181.

DOI: https://doi.org/10.30970/ms.58.2.174-181

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85163316386

ISSN: 10274634

3. Filevych P.V., Hrybel O.B. Global estimates for sums of absolutely convergent Dirichlet series in a half-plane // Mat. Stud. — 2023. — Vol. 59, no. 1. — P. 60 – 67.

DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.1.60-67

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85163398844

ISSN: 10274634

4. Filevych P.V., Hrybel O.B. Generalized and modified orders of growth for Dirichlet series absolutely convergent in a half-plane // Mat. Stud. — 2024. — Vol. 61, no. 2. — P. 136 – 147.

DOI: https://doi.org/10.30970/ms.61.2.136-147

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85197629578

ISSN: 10274634

5. Hrybel O.B., Filevych P.V. Estimates for sums of Dirichlet series // Carpathian Math. Publ. — 2025. — Vol. 17, no. 1. — P. 42 – 66.

DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.17.1.42-66

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/105003942243

ISSN: 20759827

Список публікацій здобувача, що підтверджують апробацію матеріалів дисертації

1. Грибель О.Б. Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле // Звітна наукова веб–конференція викладачів, докторантів, аспірантів та студентів університету за 2020 рік (Івано–Франківськ, 5–9 квітня 2021 р.): матеріали конференції — Івано–Франківськ: Прикарп. нац. ун-т ім. В. Стефаника. — 2021. — С. 107–108.

URL: https://nauka.pnu.edu.ua/wp-content/uploads/sites/122/2021/08/%D1%82%D0%B5%D0%B7%D0%B8-%D0%BF%D0%BD%D1%832021.pdf

2. Filevych P.V., Hrybel O.B. Generalized orders of the growth of entire Dirichlet series// International Conference "Complex Analysis and Related Topics 2021" dedicated to the 90th anniversary of A.A.Gol'dberg (Lviv, 28 June – 1 July 2021): book of abstracts — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv. — 2021. — P. 19.

URL: https://drive.google.com/file/d/1P9TrflBix_jWCGckC0pMqY7Eo0hbfm8O/view?usp=sharing

3. Filevych P.V., Hrybel O.B. Asymptotic estimates for sums of absolutely convergent Dirichlet series in a half-plane// The International Conference in Complex and Functional Analysis dedicated to the memory of Bohdan Vynnytskyi (Drohobych, 13–16 September 2021): book of abstracts — Drohobych: Drohobych State Pedagogical University of Ivan Franko. — 2021. — P. 18.

URL: https://drive.google.com/file/d/1Dih2rV_XwkNlCcnQ5QmSLi7Udqj0Spxx/view?usp=sharing

4. Hrybel O.B. Generalized orders of the growth for Dirichlet series absolutely convergent in a half-plane// International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (Rome, 18 July 2023): book of proceedings — Rome: International Telematic University UNINETTUNO. — 2023. — P. 76–78.

URL: https://drive.google.com/file/d/1oDjx1bPqWu4AMdTqTsV0_-GqOZLghPGA/view?usp=drive_link