Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20 051.148
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Шарину Сергію Володимировичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

РЕЦЕНЗІЯ

доктора фізико-математичних наук, професора,
професора кафедри математичного і функціонального аналізу
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
Дмитришина Романа Івановича
на дисертаційну роботу **Грибель Ольги Богданівни**
«Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле», подану на здобуття
ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дослідження

Багато важливих властивостей аналітичних функцій цілком визначаються їх асимптотичною поведінкою. Опис асимптотичної поведінки заданої аналітичної функції часто зводиться до встановлення певної асимптотичної оцінки зверху для модуля цієї функції. У випадку, коли аналітичну функцію не задано явно, а відомо лише, що вона є сумою деякого функціонального ряду, отримати необхідну інформацію щодо її асимптотичної поведінки можна лише за тими елементами ряду, що його задають, наприклад, за відомими коефіцієнтами у випадку степеневого ряду чи за відомими коефіцієнтами і показниками у випадку ряду Діріхле.

У дисертаційній роботі О.Б. Грибель досліджуються абсолютно збіжні ряди Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників. Зауважимо, що кожен такий ряд Діріхле у випадку, коли послідовність його показників збігається з послідовністю невід'ємних цілих чисел, може бути зведеним за допомогою простої заміни до степеневого ряду (і навпаки).

Дослідження, проведені в дисертації, безпосередньо пов'язані з наступною класичною задачею: встановити умови на послідовності коефіцієнтів та показників заданого ряду Діріхле, за яких для супремуму модуля його суми правильна та чи інша оцінка зверху. Ця задача носить загальний характер і навіть в окремих конкретних випадках залишається далекою від остаточного розв'язання.

Різноманітні підходи і методи до розв'язання сформульованої задачі пропонувались у працях багатьох авторів. Значний внесок у цьому напрямі зроблено львівською школою теорії функцій, в основному, М.М. Шереметою, О.Б. Скасківим та їхніми учнями. Проведені дослідження істотно використовують техніку такої важливої функції коефіцієнтів ряду Діріхле як його максимальний член. Завдяки напрацьованій методиці, вдалось знайти умови на послідовність показників ряду Діріхле, що є необхідними та достатніми для виконання найзагальніших оцінок зверху для супремуму модуля ряду Діріхле через його максимальний член зовні малої виняткової множини (М.М. Шеремета, О.Б. Скасків), дослідити питання щодо існування і розмірів виняткових множин в окремих співвідношеннях між модулем суми ряду і його максимальним членом (О.Б. Скасків, П.В. Філевич, Т.М. Сало, А.О. Куриляк), встановити умови виконання найзагальніших оцінок зверху без виняткових множин для супремуму модуля ряду Діріхле через його максимальний член (М.М. Шеремета, П.В. Філевич, О.Б. Скасків, і О.Ю. Задорожна), тощо.

Попри численні дослідження, низка задач, пов'язаних з дослідженням відносної поведінки супремуму модуля ряду Діріхле і його максимального члена, залишалися відкритими. До таких слід віднести задачі щодо обґрунтування чи спростування необхідності знайденої П.В. Філевичем та М.М. Шереметою умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле, чи щодо можливості встановлення універсальної формули типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле з довільною абсцисою абсолютної збіжності і довільною системою показників, або щодо опису зростання ряду Діріхле в термінах його модифікованих порядків.

Використання максимального члена ряду Діріхле для оцінювання супремуму модуля його суми є можливим, як це випливає з отриманих нещодавно Т.Я. Гловою і П.В. Філевичем результатів, лише за певних умов на послідовність показників заданого ряду. Значною мірою цей факт обумовлений тим, що абсциса абсолютної збіжності ряду Діріхле може бути меншою за абсцису існування його максимального члена.

Ефективний підхід для оцінювання сум цілих рядів Діріхле здійснив у 1999 році М.М. Шеремета, встановивши оцінки для модуля суми цілого ряду Діріхле (без жодних припущень щодо його показників) через максимальний член допоміжного ряду Діріхле, пов'язаного певним чином зі заданим. Ці оцінки знайшли своє застосування в кількох роботах при встановленні умов виконання різних асимптотичних властивостей цілих рядів Діріхле, зокрема, при встановленні умов виконання деяких глобальних оцінок для їх сум. Оскільки структура коефіцієнтів пов'язаного ряду не є простою (вони є залишками деякого збіжного ряду), то чи не єдиним обтяжливим моментом при цьому є те, що згадані вище умови записуються якраз через коефіцієнти пов'язаного ряду і не завжди можуть бути зручними для перевірки.

З огляду на сказане, виникає питання про можливість побудови ряду Діріхле з простішою структурою коефіцінтів, пов'язаного зі заданим цілим рядом Діріхле, який близький за своїми корисними властивостями до уведеного М.М. Шереметою допоміжного ряду. У разі позитивної відповіді на це питання, логічним виглядає залучення нового пов'язаного ряду для встановлення необхідних та достатніх умов на послідовність коефіцінтів заданого цілого ряду Діріхле, які забезпечують виконання найзагальніших асимптотичних та глобальних оцінок для його суми. Природним є також розгляд аналогічних задач і для абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле.

Описані вище відкриті задачі і є предметом розгляду у даній дисертаційній роботі, в актуальності теми якої не повинно виникати жодних сумнівів.

Зміст роботи і новизна одержаних результатів

Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить відомості про публікацій авторки та апробацію отриманих результатів. Повний обсяг дисертації становить 147 сторінок друкованого тексту, а список використаних джерел містить 74 найменування.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, зосереджено увагу на науковій новизні одержаних результатів, відзначено теоретичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, наведено дані щодо апробації та публікацій результатів роботи.

Об'єктом дослідження в роботі є цілі та абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників. Основну увагу в роботі сконцентровано на отримані умов на послідовність модулів коефіцієнтів ряду Діріхле, за яких для його суми виконується та чи інша загальна асимптотична оцінка зверху.

Розділ 1 містить огляд літератури за тематикою дослідження, аналіз відомих результатів, що безпосередньо стосуються теми дисертації, та чітке обґрунтування вибору напрямків дослідження.

У розділі 2 для кожного цілого ряду Діріхле уведено у розгляд пов'язаний з ним ряд Діріхле і доведено апроксимаційну теорему, що дає оцінку для суми заданого ряду через максимальний член пов'язаного ряду. Варто зауважити, що коефіцієнти пов'язаного ряду виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого цілого ряду Діріхле, а максимальний член пов'язаного ряду є визначеним на всій числовій осі, хоча сам цей ряд не зобов'язаний бути цілим. Використовуючи вказану апроксимаційну теорему, здобувачка встановила відносні асимптотичні оцінки для суми цілого ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного ряду, а також отримала умови на коефіцієнти довільного цілого ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних та глобальних оцінок для його суми. Результати розділу 2, зокрема, доповнюють результати М.М. Шеремети, отримані у 1999 році.

Аналогічні задачі для рядів Діріхле, що абсолютно збігаються у півплощині, розглянуто в наступному розділі 3. Тут для кожного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле здобувачка вводить у розгляд два пов'язані з ним ряди Діріхле та доводить апроксимаційні теореми, що дають оцінки для суми заданого ряду через максимальні члени пов'язаних рядів. Далі згадані апроксимаційні теореми застосовується для встановлення асимптотичних оцінок між сумою абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та максимальними членами пов'язаних рядів, а також для отримання умов на коефіцієнти довільного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання низки загальних асимптотичних та глобальних оцінок для його суми.

Деякі відкриті задачі, пов'язані з відносним зростанням ряду Діріхле і його максимального члена, досліджено в розділі 4. Тут, власне, обґрунтовано необхідність отриманої П.В. Філевичем та М.М. Шереметою у 2003 році умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле, доведено універсальну формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле, знайдено необхідні та достатні умови на показники ряду Діріхле, за яких його модифікований порядок збігається з модифікованим порядком логарифма його максимального члена, а також встановлено формули для обчислення модифікованого порядку ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів.

Всі основні наукові результати дисертації є новими. Вони самостійно і вперше отримані її авторкою.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів

Здобувачка продемонструвала глибоке розуміння ідей та методів, що застосовуються нею у роботі. Усі основні результати дисертації строго обґрунтовано та подано з добре продуманими і коректними доведеннями. Лише окремі результати, що випливають з основних, наведено з короткою аргументацією щодо їх доведення, проте цієї аргументації достатньою для підтвердження істинності даних результатів.

Публікації та апробація результатів

Результати дисертації опубліковано в п'яти статтях, кожна з яких проіндексована у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection, а також у чотирьох тезах конференцій. Вони доповідались і обговорювались на кількох міжнародних наукових конференціях і фахових семінарах, а тому пройшли належну апробацію.

Практичне значення отриманих результатів

Наукові результати, отримані в дисертаційній роботі, мають теоретичне значення і можуть бути використанні у подальших дослідженнях з теорії аналітичних функцій. Вони також можуть знайти застосування в суміжних розділах математики, в яких як природні об'єкти дослідження виникають ряди Діріхле чи степеневі ряди.

Відсутність порушення академічної доброчесності

За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату, елементів фабрикації та фальсифікації. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У дисертаційній роботі відсутні порушення академічної доброчесності.

Зауваження до дисертації

У дисертації наголошено, що в колі тих задач, які в ній досліджуються, ряди Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників слід розглядати як безпосереднє узагальнення степеневих рядів. Тому, як мені видається, в роботі варто було навести наслідки з отриманих результатів для степеневих рядів і охарактеризувати ступінь їх новизни.

У підрозділі 4.2 доведено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена ряду Діріхле з довільною абсцисою існування максимального члена, яка є правильною за загальних припущень щодо функцій порівняння α і β. В окремих випадках для α і β простіші формули такого сорту встановлено раніше (див., наприклад, формули (1.19) і (1.20)). В дисертації було б корисно проаналізувати, як з отриманої у підрозділі 4.2 загальної формули типу Коші-Адамара випливають (і чи випливають взагалі) згадані формули (1.19) і (1.20) або інші відомі формули такого сорту, що були попередньо отримані за додаткових припущень щодо функцій порівняння α і β.

Крім того, незважаючи на загалом добре оформлення дисертації, в ній наявні описки і недогляди. Проілюструємо сказане тільки деякими прикладами:

1) с. 20_4: під час введення класу Y_A помилково використано D_Φ замість правильного позначення D_α;

2) с. 59_1: написано $\varepsilon = \varepsilon(\sigma))$, а має бути $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$;

3) с. 99_5: помилково написано $F \in \mathcal{D}^*$ замість $F \in \mathcal{D}^*_{+\infty}$;

4) с. 109^{15}: замість “Крім того, в ...” повинно бути “Крім того, ...”;

5) с. 110_7: в рівності $M(\sigma, F) = \mathfrak{M}((\sigma, F)$ присутня зайва дужка;

6) с. $117, 118$: у формулюванні теореми 4.8 замість $R^*_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ і $R_{\alpha,\beta,\gamma}(F)$ повинно відповідно бути $R^*_{\alpha,\beta}(F)$ і $R_{\alpha,\beta}(F)$;

7) с. 120_5: має бути $M(\sigma, F) = F(\sigma) \geq \Psi(\sigma)$ замість $M(\sigma, F) = F(\sigma) \geq l(\sigma)$.

Зауважу, що зазначені недоліки не є суттєвими, вони жодним чином не впливають на загальне позитивне враження від дисертаційної роботи і ніяк не применшують високої її оцінки.

Загальний висновок

Рецензована робота є самостійною науковою працею, яке має вагоме теоретичне значення і містить нові ідеї щодо проведення подальших досліджень властивостей аналітичних функцій, зображених рядами Діріхле.

Вважаю, що дисертація «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле» повністю відповідає вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її авторка, Грибель Ольга Богданівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
професор кафедри математичного і функціонального аналізу
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника ____________ Роман ДМИТРИШИН