Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20 051.148
Прикарпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору
Шарину Сергію Володимировичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

РЕЦЕНЗІЯ

доктора фізико-математичних наук, професора,
завідувача кафедри математичного і функціонального аналізу
Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
Загороднюка Андрія Васильовича
на дисертаційну роботу **Грибель Ольги Богданівни**
«Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
в галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Важливими об'єктами дослідження в теорії аналітичних функцій є ряди Діріхле. Вивчення властивостей таких рядів обумовлене також тим, що вони все частіше стають інструментом дослідження, причому не лише в теорії аналітичних функцій. Ряди Діріхле природно виникають в інших розділах математики, наприклад, в теорії диференціальних рівнянь, теорії чисел, теорії ймовірностей.

Зацікавленість до досліджень властивостей рядів Діріхле, які розпочались ще на початку минулого століття, постійно зростає. Протягом останніх десятиріч такі дослідження активно проводяться львівською школою теорії аналітичних функцій. Серед авторів цих досліджень варто відзначити М.М. Шеремету, О.Б. Скасківа та П.В. Філевича, які разом зі своїми учнями виконали цілий ряд глибоких досліджень властивостей рядів Діріхле.

Об'єктом дослідження в даній дисертаційній роботі є цілі та абсолютно збіжні у півплощині ряди Діріхле з невід'ємною зростаючою до $+\infty$ системою показників. При цьому авторка дисертації за основну мету ставить отримання умов на коефіцієнти та показники ряду Діріхле, які гарантують виконання для супремуму модуля його суми низки найзагальніших асимптотичних оцінок. Зауважимо, що задачі такого роду по суті є задачами щодо опису зростання ряду Діріхле, яке, як правило, характеризується певною асимптотичною оцінкою для супремуму модуля цього ряду.

Надвичайно корисним під час пошуку підходів до розв'язання зазначених задач виявляється залучення простої і одночасно ефективної функції коефіцієнтів і показників ряду Діріхле, якою є його максимальний член. Значною мірою це пов'язано з тим, що зростання логарифма максимального члена ряду Діріхле нескладно описати, для прикладу, з використанням функції, спряженої за Юнгом з функцією, зі зростанням якої порівнюється зростання логарифма максимального члена заданого ряду. Зауважимо, що при цьому за функцію порівняння можна брати практично довільну функцію дійсного аргументу зі значеннями з розширеної дійсної прямої.

З огляду на сказане, численні дослідження, що стосуються опису зростання рядів Діріхле з певних широких класів, були присвячені встановленню умов на показники ряду Діріхле, які забезпечують виконання тої чи іншої асимптотичної оцінки зверху для його супремуму модуля через його ж максимальний член (оцінкою знизу такого сорту є аналог нерівності Коші). Зрозуміло, що застосування таких асимптотичних оцінок є обмежене відповідною умовою на показники ряду Діріхле. При цьому відмовитись від умов на показники тут не можна, що чітко аргументовано в самій дисертаційній роботі.

Дещо інший підхід для оцінювання сум рядів Діріхле було здійснено М.М. Шереметою в 1999 році. Власне, М.М. Шеремета встановив оцінки для супремуму модуля цілого ряду Діріхле через максимальний член допоміжного ряду Діріхле, пов'язаного зі заданим, причому знайдені оцінки є правильні без жодних припущень щодо системи показників заданого ряду. Ще одним важливим моментом при цьому є те, що максимальний член пов'язаного ряду у певному сенсі добре наближує супремум модуля заданого ряду.

Варто зазначити, що кожен коефіцієнт уведеного М.М. Шереметою пов'язаного ряду сам є рядом (числовим), тому цей пов'язаний ряд не завжди може бути зручним у використанні. У зв'язку з цим, виникає задача щодо можливості побудови нового ряду Діріхле, пов'язаного зі заданим цілим рядом Діріхле, який володіє такими ж добрими властивостями, як і побудований М.М. Шереметою пов'язаний ряд, але при цьому коефіцієнти нового пов'язаного ряду значно простіше виражаються через коефіцієнти заданого ряду (наприклад, є скінченними сумами).

Аналогічна задача виникає і стосовно абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле: за заданим рядом Діріхле побудувати пов'язаний з ним ряд Діріхле з простою структурою коефіцієнтів і максимальним членом, який в певному сенсі добре наближує супремум модуля заданого ряду.

Сформульовані задачі, як і ряд інших близьких задач, є предметом дослідження у даній дисертаційній роботі. На мою думку, не повинно виникнути сумніву у важливості розгляду таких задач, а це свідчить про **актуальність теми** дисертації.

Напрямок досліджень, обраний у дисертації, передбачений планами наукової роботи Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, а саму роботу виконано на кафедрі математичного та функціонального аналізу. Дисертаційна робота є складовою частиною досліджень в рамках науково-дослідної теми "Комплексно-алгебричні методи в теорії динамічних систем і їх застосування для задач радіолокації" (державний реєстраційний номер 0124U000520).

Результати дисертаційного дослідження опубліковано у дев'яти наукових працях, п'ять з яких — журнальні статті у фахових виданнях, що входять до наукометричних баз даних Scopus та/або Web of Science, а ще чотири — тези доповідей на наукових конференціях.

Структурно дисертація містить усі необхідні компоненти. Вона складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (74 найменування) та додатку, який містить список публікацій авторки та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, наведено інформацію щодо наукової новизни одержаних результатів, вказано на їх теоретичне значення, відзначено особистий внесок здобувачки, наведено дані щодо апробації та публікацій результатів роботи.

У розділі 1 здійснено огляд літератури за тематикою дисертації та обґрунтовано вибір напрямків дослідження.

У розділі 2 для кожного цілого ряду Діріхле побудовано пов'язаний з ним ряд Діріхле, коефіцієнти якого виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено апроксимаційну теорему 2.1, що дає оцінку для суми заданого цілого ряду Діріхле через максимальний член пов'язаного ряду. Використовуючи теорему 2.1, а також деякі допоміжні результати, авторка встановила відносні асимптотичні оцінки для суми цілого ряду Діріхле та максимального члена пов'язаного з ним ряду, знайшла умови на коефіцієнти довільного цілого ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання різних асимптотичних та глобальних оцінок зверху для його суми.

У розділі 3 для кожного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле побудовано два пов'язані з ним ряди Діріхле, коефіцієнти яких виражаються у вигляді скінченних сум через коефіцієнти заданого ряду, та доведено апроксимаційні теореми 3.1 та 3.2, що дають оцінки для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через максимальні члени пов'язаних рядів. Скориставшись теоремами 3.1 та 3.2, здобувачка встановила відносні асимптотичні оцінки для суми заданого абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле та максимального члена кожного з пов'язаних рядів, знайшла умови на коефіцієнти довільного абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, які є необхідними та достатніми для виконання різних асимптотичних та глобальних оцінок зверху для його суми.

У розділі 4 обґрунтовано необхідність знайденої раніше П.В. Філевичем та М.М. Шереметою умови одночасної правильної зміни логарифмів супремуму модуля і максимального члена цілого ряду Діріхле, доведено формулу типу Коші-Адамара для обчислення узагальненого порядку логарифма максимального члена довільного ряду Діріхле, досліджено зростання абсолютно збіжних у півплощині рядів Діріхле в термінах модифікованих порядків, зокрема, за доволі загальних припущень щодо функцій порівнянь знайдено необхідні та достатні умови на показники абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле, за яких його модифікований порядок збігається з модифікованим порядком логарифма його максимального члена, і встановлено формули для обчислення модифікованого порядку абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле через послідовність модулів його коефіцієнтів.

Загальні висновки до дисертації чітко відображають основні її результати та їх наукову цінність. Список використаних джерел включає в основному найсвіжіші праці за темою дисертаційного дослідження.

Отримані дисертантом наукові результати є новими, вони пройшли належну апробацію на наукових конференціях та спеціалізованих семінарах. Усі теоретичні положення супроводжуються чіткими і коректними математичними доведеннями або принаймні аргументацією, достатньою для підтвердження їх істинності.

У процесі роботи над дисертацією здобувачка дотримувалась принципів академічної доброчесності. За результатами перевірки та аналізу тексту роботи не виявлено жодних ознак академічного плагіату, фабрикації чи фальсифікації. Усі результати, що належать іншим авторам та наведені або використовуються у дисертації, мають посилання на першоджерело.

До роботи є наступні **зауваження**:

1. Як відомо, у працях львівських математиків, зокрема, в роботах О.Б. Скасківа і деяких його учнів, встановлювались умови виконання оцінок (зовні виняткової множини) між супремумом модуля і максимальним членом для рядів Діріхле, на показники яких накладалися слабші умови, ніж у даній дисертаційній роботі. У зв'язку з цим, на

мою думку, у дисертації варто було прояснити ситуацію щодо можливості поширення результатів розділів 2 і 3 на випадок рядів Діріхле зі складнішою структурою показників, наприклад, на випадок, коли послідовність показників є невід'ємною, але має скінченну точку (чи скінченні точки) скупчення.

2. Теореми 2.9–2.15, 3.8–3.13 з підрозділів 2.4 і 3.3, в яких вказано умови виконання різних асимптотичних оцінок для рядів Діріхле, наведено в дисертації лише з короткими коментарями щодо того, як їх можна отримати з інших її результатів. Цих коментарів в принципі достатньо, щоб переконатися у правильності згаданих теорем. Проте, на мою думку, хоча б частину з цих теорем варто було навести з повноцінними доведеннями (навіть якщо ці доведення прості).

3. Дисертація акуратно оформлена і загалом добре вичитана, проте в ній допущено поодинокі орфографічні та стилістичні помилки, а також деякі описки та неточності:

а) на с. 13 у рядку 2 написано "for the sequence", хоча мало б бути "by the sequence";

б) на с. 21 у рядку 15 при введені величини $R^*_{\alpha,\beta}(F)$ замість "$R_{\alpha,\beta}(F) = R_{\alpha,\beta}[\eta]$" повинно бути "$R^*_{\alpha,\beta}(F) = R_{\alpha,\beta}[\eta]$";

в) на с. 69 у рядку 3 написано "$\Psi(0) = 0$", а має бути "$\Psi(-\infty) = 0$";

г) у доведенні теореми 3.1 на с. 79 і 80 скрізь замість "T" має бути "S";

ґ) на с. 106 у рядку 5 написано "...теоремою A...", хоча такої теореми в дисертації нема (мало б бути "...теоремою 1.6...");

д) на с. 106 у рядках 8 і 9 замість "...теоремою C..." повинно бути "...теоремою 2.17...";

е) на с. 121 у рядку 6 знизу заміть позначення $\sigma_e(G)$ використовується позначення $\sigma^*(G)$, яке ніде в роботі не означено.

Наведені зауваження не є принциповими та не знижують загальної цінності отриманих результатів та позитивної оцінки дисертації Грибель О.Б.

Дисертаційна робота є завершеним самостійним науковим дослідженням, її результати достовірні та належним чином обґрунтовані, що свідчить про добрий рівень наукової підготовки здобувачки.

Отримані у дисертаційній роботі результати носять теоретичний характер і можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії аналітичних функцій.

Підсумовуючи сказане, можу зробити **висновок**, що рецензована дисертаційна робота «Асимптотичні оцінки сум рядів Діріхле» за змістом, структурою, оформленням, отриманими результатами, публікаційною та апробаційною складовими повністю відповідає вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022 р. (зі змінами), а її авторка, Грибель Ольга Богданівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника ______________ Андрій ЗАГОРОДНЮК